Sistemi Lineari

Eliminazione di Gauss

Svolgimento Esercizio 1. Ricordiamo che un sistema lineare del tipo $Ax = b$ ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa $(A|b)$. Nel caso in questione è

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m+1 & m+2 \\ m & m+4 & 3 \end{array}\right).$$

Per calcolare il rango di quest'ultima matrice sottraiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per m, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m+1 & m+2 \\ 0 & 4-m^2 & 3-m^2-2m \end{array}\right).$$

Si vede dunque che, se $m \neq \pm 2$ si ha $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$, e quindi il sistema ha un'unica soluzione, mentre per $m = 2$ oppure $m = -2$ si ha $\text{rango}(A) = 1$ mentre $\text{rango}(A|b) = 2$, e quindi il sistema non ammette soluzioni.

Si noti tuttavia che l'esercizio richiede di risolvere esplicitamente il sistema; in casi come questo si può allora evitare di studiare il rango delle matrici in questione, e si può invece risolvere direttamente il sistema; si scoprirà così strada facendo quando la soluzione esiste (e se è unica oppure no) e quando non esiste. Per risolvere il sistema utilizziamo il metodo di eliminazione di Gauss (che è esattamente lo stesso metodo che abbiamo usato per determinare il rango di una matrice): sottraiamo alla seconda equazione la prima moltiplicata per m, ottenendo

$$\begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ (4-m^2)y = 3-m^2-2m \end{cases}$$

da cui si deduce che, se $m \neq \pm 2$, si ha

$$\begin{cases} y = \dfrac{m^2+2m-3}{m^2-4} \\ x = -\dfrac{m^2+3m+5}{m^2-4} \end{cases}$$

mentre, se $m = 2$ oppure $m = -2$, il sistema non ammette soluzioni.

Svolgimento Esercizio 2. Risolviamo direttamente il sistema usando il metodo di eliminazione di Gauss. Notiamo innanzitutto che, se $m = 0$, il sistema ha un'unica soluzione data da

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Se $m \neq 0$ sostituiamo la seconda equazione con la somma della seconda, moltiplicata per m, e della prima, moltiplicata per $-(m+1)$, ottenendo

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (1-2m^2)y = 4m^2 - 2. \end{cases}$$

Ora, se $m^2 = \frac{1}{2}$, nella seconda equazione si ottiene $0 = 0$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni (dipendenti da un parametro), mentre, se $m^2 \neq \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3. \end{cases}$$

In conclusione il sistema ha un'unica soluzione (che non dipende da m) se $m^2 \neq \frac{1}{2}$, altrimenti ne ha infinite.

Svolgimento Esercizio 3. In questo caso non è richiesto di risolvere sempre il sistema, quindi possiamo limitarci, per ora, a studiare il rango delle matrici del sistema:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\lambda & \lambda^2 & 0 \end{array}\right).$$

Con operazioni elementari sulle righe si può trasformare questa matrice fino ad ottenere la matrice seguente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda & 0 \end{array}\right).$$

Si scopre allora che, se $\lambda = 0$ si ha $\text{rango}(A) = 2$ e $\text{rango}(A|b) = 3$, quindi il sistema non ammette soluzione. Se $\lambda = 1$ si ha $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A|b)$, quindi il sistema ammette soluzioni e, dato che il rango di A non è 4, le soluzioni sono infinite (e dipendono da $4 - 3 = 1$ parametro). Infine, se $\lambda \neq 0, 1$, la matrice A ha rango massimo ($= 4$), quindi è invertibile, ed il sistema ha un'unica soluzione.

A questo punto non ci rimane altro che risolvere il sistema nel solo caso $\lambda = 1$. In questo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 2y + 2w + z = 1 \\ y + 2w + z = 0 \\ x + y + w = 0 \\ y + 2w + z = 0 \end{cases}$$

che, mediante eliminazione di Gauss, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2w + z = 1 \\ y + 2w + z = 0 \\ w = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene, ricavando ad esempio x, y e w in funzione di z,

$$\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - z \\ w = -1. \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio 4. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss si ottiene, alla fine, il sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 3t = b_1 \\ y + 2z = b_2 - b_1 \\ 0 = b_3 - b_2 + b_1 \\ t = 2b_1 - b_2 - b_4. \end{cases}$$

Si trova dunque che, se $b_3 - b_2 + b_1 \neq 0$, il sistema non ha soluzione, mentre se $b_3 - b_2 + b_1 = 0$ ci sono infinite soluzioni, date (ad esempio ricavando x, y e t in funzione di z) da

$$\begin{cases} t = 2b_1 - b_2 - b_4 \\ y = b_2 - b_1 - 2z \\ x = -2b_1 + 3b_4 + z. \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio 5. In questo caso non è richiesto di risolvere il sistema, quindi basta studiare il rango delle matrici completa e incompleta.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda - 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Con operazioni elementari sulle righe si può trasformare questa matrice fino ad ottenere

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda - \lambda^2 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda^2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A questo punto si scopre che, se $\lambda = 0, 1$ si ha rango$(A) = 3$ e rango$(A|b) = 4$, quindi il sistema non ha soluzioni. Se invece $\lambda \neq 0, 1$ la matrice A ha rango massimo, quindi è invertibile e dunque la soluzione esiste ed è unica. Il fatto che tale soluzione appartenga a $\mathbb{Q}^4$ è ovvio, dato che tutte le operazioni necessarie per risolvere il sistema coinvolgono solo somme e prodotti di numeri razionali.

Svolgimento Esercizio 6. Calcoliamo il rango delle matrici completa e incompleta:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -\mu & -\mu & \mu \\ \mu & -\lambda & 0 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Con operazioni elementari sulle righe si ottiene alla fine la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - \mu & \lambda - \mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda + \mu \end{array}\right).$$

Bisogna distinguere allora i seguenti casi:

(1) $\lambda = 0$, $\mu = 0$: si ha $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 1$, quindi esistono infinite soluzioni (dipendenti da $3 - 1 = 2$ parametri);
(2) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$: si ha $\text{rango}(A) = 2$, $\text{rango}(A|b) = 3$, quindi non esistono soluzioni;
(3) $\lambda \neq 0$, $\mu = \lambda$: si ha $\text{rango}(A) = 2$, $\text{rango}(A|b) = 3$, quindi non esistono soluzioni;
(4) $\lambda \neq 0$, $\mu \neq \lambda$: si ha $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, quindi il sistema ha un'unica soluzione.