Spazio Affine

Rette e Piani

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si determini la retta r passante per il punto $P = {}^t(1, p_1, p_2, p_3)$ e parallela al vettore $v = {}^t(0, v_1, v_2, v_3)$.

Esercizio 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si determini la retta r passante per i punti $P = {}^t(1, p_1, p_2, p_3)$ e $Q = {}^t(1, q_1, q_2, q_3)$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si determini il piano π passante per il punto $P = {}^t(1, p_1, p_2, p_3)$ e parallelo ai vettori $v = {}^t(0, v_1, v_2, v_3)$ e $w = {}^t(0, w_1, w_2, w_3)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si determini il piano π passante per i tre punti (non allineati) $P = {}^t(1, p_1, p_2, p_3)$, $Q = {}^t(1, q_1, q_2, q_3)$ e $R = {}^t(1, r_1, r_2, r_3)$.

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia r la retta di equazioni

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Si determini la retta s passante per l'origine e parallela ad r, ed il piano del fascio di asse r passante per l'origine.

Esercizio 6. Siano r_1 e r_2 rispettivamente le rette passanti per $P_1 = {}^t(1, 0, 1, 2)$ e $P_2 = {}^t(1, 2, -1, 0)$ e parallele ai vettori $v_1 = {}^t(0, 2, 1, 1)$ e $v_2 = {}^t(0, -2, 3, 3)$. Siano $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ rispettivamente i fasci di piani di asse r_1 e r_2. Si determinino i piani π_1 di $\mathcal{F}_1$ e π_2 di $\mathcal{F}_2$ passanti per il punto $P = {}^t(1, 1, 1, 1)$, e le intersezioni della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ con i piani coordinati. Si determini infine il triangolo individuato dalle intersezioni delle rette r, r_1 e r_2 con il piano di equazione $x = 0$.

Esercizio 7. Determinare l'equazione del piano passante per le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} y + 1 = 0 \\ 2x + 2z - 3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 8. Sia r la retta passante per i punti $P = {}^t(1, 1, 0, -2)$ e $Q = {}^t(1, 0, -1, 3)$, e sia s la retta passante per il punto $R = {}^t(1, -1, 1, 0)$ e parallela al vettore $v = {}^t(0, 1, -1, -\frac{1}{2})$.

Si determinino il piano π_1, passante per i punti P, Q e R, il piano π_2 contenente la retta s e passante per il punto medio del segmento PQ, ed infine un vettore u parallelo alla retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

Distanza di un Punto da una Retta

Esercizio 9. Si determini la distanza del punto $P = {}^t(1, 2, 0, -1)$ dalla retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2 \\ z = t - 1. \end{cases}$$

Coni e Cilindri

Esercizio 10. Si determinino le rette passanti per il punto $Q = {}^t(1,0,1,-1)$, distanti 1 dal punto $P = {}^t(1,1,1,0)$ e contenute nel piano π di equazione $y+z=0$.

Esercizio 11. Si determini l'equazione del luogo dei punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ appartenenti alle rette passanti per il punto $P = {}^t(1,2,1,1)$ che formano un angolo pari a $\frac{\pi}{6}$ con il piano π di equazione $2x+y-z=0$.

Esercizio 12. Si determini l'equazione del luogo dei punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ appartenenti alle rette passanti per il punto $P = {}^t(1,3,3,3)$ che intersecano la curva C di equazione

$$\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=4 \\ x+z=0. \end{cases}$$

Esercizio 13. Si determinino le rette del piano π di equazione $x-y+2z=0$ parallele al vettore $v = {}^t(0,1,3,1)$ e distanti $\sqrt{6}$ dal punto $P = {}^t(1,1,0,0)$.

Esercizio 14. Nello spazio affine reale tridimensionale, si determini l'equazione del luogo dei punti appartenenti alle rette distanti 1 dal punto $P = {}^t(1,1,1,2)$ e formanti un angolo pari a $\frac{\pi}{3}$ con i piani $\pi_1 : x+y=0$ e $\pi_2 : x-z=0$.

Esercizio 15. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia π il piano contenente la retta r di equazioni $\frac{1}{2}(x-1) = y+1 = \frac{1}{3}z$ ed il punto $P = {}^t(1,0,1,1)$.

Si determinino le rette del piano π passanti per P e distanti $\sqrt{3}$ dal punto $Q = {}^t(1,1,1,-1)$. Si determinino inoltre la proiezione ortogonale Q_0 di Q su π e le rette di π passanti per Q_0 e ortogonali alle rette trovate in precedenza.

Altri Esercizi

Esercizio 16. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si determinino le equazioni delle rette passanti per $P = {}^t(1,1,0,0)$, incidenti la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} y+z-1=0 \\ x=0 \end{cases}$$

e formanti con quest'ultima un angolo pari a $\frac{\pi}{6}$.

Esercizio 17. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri l'affinità di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rispetto ad un sistema di riferimento ortonormale.

Si mostri che A è la matrice di una isometria dello spazio euclideo che ammette una retta r fatta di punti uniti, e si determini l'equazione di tale retta. Si dica inoltre se A è la matrice di una rotazione di asse r e, in caso affermativo, si determini l'angolo di rotazione.