Spazio Affine

Rette e Piani

Svolgimento Esercizio 1. La retta r cercata è l'insieme dei punti X tali che il vettore $X - P$ è multiplo del vettore v. Si ha quindi

$$r = \{X \in \mathbb{A}^3 \mid X - P = \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Se poniamo $X = {}^t(1, x_1, x_2, x_3)$, si ottengono così le equazioni

$$\begin{cases} x_1 - p_1 = \lambda v_1 \\ x_2 - p_2 = \lambda v_2 \\ x_3 - p_3 = \lambda v_3 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche della retta r.

Se da queste equazioni eliminiamo il parametro λ, e se supponiamo che $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, si ottengono le due equazioni seguenti

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$$

che sono le equazioni cartesiane della retta r cercata.

Svolgimento Esercizio 2. La retta r cercata è la retta passante per il punto P parallela al vettore $v = Q - P = {}^t(0, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$. A questo punto basta applicare quanto visto nell'esercizio precedente. Le equazioni parametriche di r sono quindi

$$\begin{cases} x_1 - p_1 = \lambda(q_1 - p_1) \\ x_2 - p_2 = \lambda(q_2 - p_2) \\ x_3 - p_3 = \lambda(q_3 - p_3) \end{cases}$$

Se poniamo $X = {}^t(1, x_1, x_2, x_3)$, queste equazioni si scrivono semplicemente come segue:

$$X = \lambda Q + (1 - \lambda)P, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento Esercizio 3. Il piano π in questione è l'insieme dei punti X tali che il vettore $X - P$ appartiene al sottospazio vettoriale generato da v e w. Si ha quindi

$$\pi = \{X \in \mathbb{A}^3 \mid X - P = \lambda v + \mu w, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Se poniamo $X = {}^t(1, x_1, x_2, x_3)$, si ottengono così le equazioni

$$\begin{cases} x_1 - p_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ x_2 - p_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 \\ x_3 - p_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche del piano π.

Un'altra descrizione del piano π si può ottenere come segue. Sia u un vettore perpendicolare a v e w (ad esempio, si prenda $u = v \times w$). Il piano π è allora l'insieme dei punti X tali che il vettore $X - P$ è perpendicolare a u, si ha dunque

$$\pi = \{X \in \mathbb{A}^3 \mid (X - P) \cdot u = 0\}.$$

Se poniamo $u = {}^t(0, u_1, u_2, u_3)$, si ottengono così l'equazione

$$u_1(x_1 - p_1) + u_2(x_2 - p_2) + u_3(x_3 - p_3) = 0.$$

Questa è l'equazione (cartesiana) del piano π.

Svolgimento Esercizio 4. Il piano π cercato è il piano passante per il punto P e parallelo ai vettori $v = Q - P = {}^t(0, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ e $w = R - P = {}^t(0, r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$. A questo punto basta applicare quanto visto nell'esercizio precedente. Le equazioni parametriche di π sono quindi

$$\begin{cases} x_1 - p_1 = \lambda(q_1 - p_1) + \mu(r_1 - p_1) \\ x_2 - p_2 = \lambda(q_2 - p_2) + \mu(r_2 - p_2) \\ x_3 - p_3 = \lambda(q_3 - p_3) + \mu(r_3 - p_3) \end{cases}$$

Se poniamo $X = {}^t(1, x_1, x_2, x_3)$, queste equazioni si scrivono semplicemente come segue:

$$X = \lambda Q + \mu R + (1 - \lambda - \mu)P, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento Esercizio 5. Per determinare la retta s è sufficiente conoscere un vettore parallelo ad r. Per determinare questo vettore basta conoscere due punti qualunque della retta r; la loro differenza fornirà il vettore cercato.

Si verifica immediatamente che i punti $P = {}^t(1, 0, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ e $Q = {}^t(1, -\frac{1}{2}, 0, 2)$ appartengono ad r, quindi come vettore parallelo ad r si può prendere $Q - P = {}^t(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Le equazioni parametriche di s sono allora

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ y = -\dfrac{1}{3}\lambda \\ z = \dfrac{1}{3}\lambda \end{cases}$$

Eliminando il parametro λ si ottengono le equazioni cartesiane di s, che sono (ad esempio)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Passiamo ora alla determinazione del piano in questione. L'equazione del fascio di piani di asse r è

$$\lambda(2x - 3y + 1) + \mu(2x - 2y + z - 1) = 0.$$

Imponendo la condizione di passaggio per l'origine, si ottiene

$$\lambda - \mu = 0,$$

e si può dunque prendere, ad esempio, $\lambda = \mu = 1$. Questo fornisce l'equazione del piano cercato, che è quindi

$$4x - 5y + z = 0.$$

Svolgimento Esercizio 6. Le equazioni cartesiane di r_1 sono

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1},$$

da cui si ottiene

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Le equazioni parametriche di r_2 sono

$$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 3t - 1 \\ z = 0, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$r_2 : \begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Le equazioni dei fasci $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ sono allora

$$\mathcal{F}_1 : \lambda(x - 2y + 2) + \mu(y - z + 1) = 0$$

e

$$\mathcal{F}_2 : \lambda'(3x + 2y - 4) + \mu' z = 0.$$

Imponendo le condizioni di passaggio per il punto $P = {}^t(1, 1, 1, 1)$ si ottiene $\lambda = -\mu$ e $\lambda' = -\mu'$. Ponendo, ad esempio, $\lambda = \lambda' = 1$ si trovano le equazioni dei piani π_1 e π_2:

$$\pi_1 : x - 3y + z + 1 = 0,$$

e

$$\pi_2 : 3x + 2y - z - 4 = 0.$$

Si ha ora

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x - 3y + z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

Il resto dell'esercizio è ora immediato.

Svolgimento Esercizio 7. Il fascio di piani di asse r ha equazione

$$\lambda(2x + 2z - 3) + \mu(y + 1) = 0.$$

Per determinare il piano passante per r e s basterà quindi determinare il piano del fascio di asse r passante per un punto di s; naturalmente bisognerà poi verificare che tutta la retta s è contenuta in questo piano.

Un punto della retta s è, ad esempio, il punto $P = {}^t(1, 2, 1, 0)$; imponendo, nel fascio di piani precedente, la condizione di passaggio per P si ottiene $\lambda = -2\mu$, da cui, ponendo $\mu = 1$, si trova l'equazione del piano π contenente la retta r e passante per il punto P:

$$\pi : -4x + y - 4z + 7 = 0.$$

Per verificare che tutta la retta s è contenuta in π basta verificare che π contiene un altro punto di s (diverso da P); infatti se un piano contiene due punti di una retta allora contiene tutta la retta.

Si verifica subito che $Q = {}^t(1, 0, 1, 2)$ è un punto di s e che $Q \in \pi$. Questo conclude la dimostrazione che π è proprio il piano contenente le due rette r e s.

Svolgimento Esercizio 8. Un vettore parallelo alla retta r è il vettore $Q - P = {}^t(0, -1, -1, 5)$; quindi le equazioni di r sono

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{5},$$

da cui si ricava

$$r : \begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ 5y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la retta s, le sue equazioni sono

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{-\frac{1}{2}},$$

da cui si ricava

$$s : \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Il piano π_1 è il piano di asse r passante per R. L'equazione del fascio di piani di asse r è

$$\lambda(-x + y + 1) + \mu(5y + z + 2) = 0,$$

e dalla condizione di passaggio per R si ottiene $\lambda = -\frac{7}{3}\mu$. Ponendo $\mu = 3$ si trova così l'equazione del piano π_1:

$$\pi_1 : 7x + 8y + 3z - 1 = 0.$$

Il punto medio M del segmento PQ è il punto dato da

$$M = \frac{P+Q}{2} = {}^t(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

(si noti che in uno spazio affine non ha alcun senso fare la *somma* di due punti. Tuttavia la formula $\frac{1}{2}(P + Q)$ fornisce precisamente le coordinate del punto medio del segmento PQ. Si consiglia al lettore di verificarlo per esercizio).

A questo punto il piano π_2 si può determinare con lo stesso procedimento usato in precedenza per determinare π_1 (si consideri il fascio di piani di asse s e si imponga la condizione di passaggio per il punto M). Si trova

$$\pi_2 : x + y = 0.$$

La retta $\pi_1 \cap \pi_2$ ha quindi equazioni

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} 7x + 8y + 3z - 1 = 0 \\ x + y = 0, \end{cases}$$

e per trovare un vettore parallelo a questa retta basta trovarne due punti, ad esempio i punti $A = {}^t(1, 0, 0, \frac{1}{3})$ e $B = {}^t(1, -1, 1, 0)$. Il vettore in questione è dunque $u = B - A = {}^t(0, -1, 1, \frac{1}{3})$.

Distanza di un Punto da una Retta

Svolgimento Esercizio 9. Ricordiamo qui le formule che permettono di determinare la distanza di un punto da una retta nello spazio affine $\mathbb{A}^3$.

Sia r la retta passante per un punto Q e parallela al vettore v, e sia P un altro punto. La distanza $d = d(P, r)$ di P dalla retta r è determinata da:

$$d^2 = (P - Q) \cdot (P - Q) - \frac{((P - Q) \cdot v)^2}{v \cdot v}.$$

Equivalentemente, si ha la formula seguente:

$$d = \frac{|(P - Q) \times v|}{|v|},$$

ove $|w| = \sqrt{w \cdot w}$ indica il modulo di un vettore w.

Per determinare la distanza di P da r basta quindi conoscere un punto Q di r ed un vettore v parallelo ad r. Nel caso in questione si verifica immediatamente che si può prendere $Q = {}^t(1, 1, 2, -1)$ e $v = {}^t(0, 1, 0, 1)$ e quindi, applicando ad esempio la prima formula, si trova $d(P, r)^2 = \frac{9}{2}$, da cui si ottiene $d(P, r) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Coni e Cilindri

Svolgimento Esercizio 10. Sia $X = {}^t(1, x, y, z)$ un punto qualunque e consideriamo la retta r, passante per Q e X. Un vettore parallelo a questa retta è il vettore $v = X - Q = {}^t(0, x, y - 1, z + 1)$. Utilizzando la formula per la distanza di un punto da una retta, si ha:

$$d(P, r)^2 = |P - Q|^2 - \frac{((P - Q) \cdot v)^2}{|v|^2}.$$

Imponendo la condizione $d(P, r) = 1$, l'equazione precedente diventa

$$1 = 2 - \frac{(x + z + 1)^2}{x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2},$$

da cui si ricava

$$y^2 - 2xz - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Questa equazione descrive il luogo dei punti X tali che la retta passante per Q e X ha distanza fissata, uguale a 1, dal punto P; si tratta quindi di un cono di vertice Q il cui asse è la retta per Q e P. Dato che le rette che interessano sono solo quelle contenute nel piano π, queste si trovano intersecando il cono trovato con il piano π in questione. Si noti, a questo proposito, che il piano π contiene il vertice Q del cono, quindi l'intersezione del piano π con il cono consiste precisamente di due rette (almeno se il piano non è tangente al cono). L'intersezione tra il piano π e il cono è data dal seguente sistema:

$$\begin{cases} y^2 - 2xz - 2x - 2y + 1 = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Ricavando $y = -z$ e sostituendo nella prima equazione, si ottiene l'equazione

$$(z + 1)(z + 1 - 2x) = 0,$$

da cui si ricavano quindi i due sistemi

$$\begin{cases} z+1=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z+1-2x=0 \\ y+z=0. \end{cases}$$

Queste sono quindi le equazioni delle due rette ottenute intersecando π con il cono in questione, che sono precisamente le rette cercate.

Svolgimento Esercizio 11. Dall'equazione del piano π si deduce che il vettore $n = {}^t(0,2,1,-1)$ è ortogonale al piano π. Una retta forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con π se e solo se forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il vettore n, quindi il problema si riduce a determinare tutte le rette passanti per P che formano un angolo fissato, pari a $\frac{\pi}{3}$, con il vettore n. Queste rette formano pertanto un cono di vertice P, di asse la retta per P parallela ad n, e di semiapertura $\frac{\pi}{3}$. L'equazione di questo cono si può trovare facilmente come segue: sia $X = {}^t(1,x,,y,z)$, questo punto appartiene al cono in questione se e solo se il vettore $X-P$ forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il vettore n; si deve pertanto avere

$$|(X-P)\cdot n| = |X-P|\,|n|\,\cos\frac{\pi}{3}.$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene

$$|2(x-2)+(y-1)-(z-1)| = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2},$$

da cui, elevando al quadrato e semplificando, si ottiene alla fine

$$5x^2-y^2-z^2+8xy-8xz-4yz-26x-10y+22z+14=0.$$

Questa è l'equazione del luogo cercato.

Svolgimento Esercizio 12. Il luogo cercato non è altro che l'insieme di tutte le rette congiungenti P con un punto Q della curva C, al variare del punto Q nella curva C. Si tratta quindi di un *cono* di vertice P proiettante la curva C.

Sia $S = {}^t(1,x_S,y_S,z_S)$ e consideriamo la retta per P e S, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = tx_S + 3(1-t) \\ y = ty_S + 3(1-t) \\ z = tz_S + 3(1-t). \end{cases}$$

Se imponiamo a questa retta di intersecare la curva C, otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} (tx_S+3(1-t))^2 + 2(ty_S+3(1-t))^2 + 3(tz_S+3(1-t))^2 = 4 \\ (tx_S+3(1-t)) + (tz_S+3(1-t)) = 0. \end{cases}$$

Ricavando t dalla seconda equazione,

$$t = \frac{6}{6-x_S-z_S}$$

e sostituendo nella prima, si ottiene

$$\left(\frac{3x_S - 3z_S}{6 - x_S - z_S}\right)^2 + 2\left(\frac{-3x_S + 6y_S - 3z_S}{6 - x_S - z_S}\right)^2 + 3\left(\frac{-3x_S + 3z_S}{6 - x_S - z_S}\right)^2 = 4,$$

da cui, sviluppando i calcoli e semplificando (e trascurando l'indice S), si ottiene alla fine

$$25x^2 + 36y^2 + 25z^2 - 36xy - 22xz - 36yz + 24x + 24z - 72 = 0.$$

Questa è l'equazione del luogo cercato.

Svolgimento Esercizio 13. Le rette parallele al vettore v e distanti $\sqrt{6}$ dal punto P formano un cilindro di asse la retta passante per P e parallela a v e raggio di base $\sqrt{6}$. Le rette cercate si ottengono quindi intersecando questo cilindro con il piano π.

Sia r la retta passante per P e parallela a v; essa ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t \\ z = t. \end{cases}$$

Sia $X = {}^t(1, x, y, z)$ un punto generico del cilindro in questione: si deve avere $d(X, r) = \sqrt{6}$. Ricordando la formula che fornisce la distanza di un punto da una retta, si ha:

$$|X - P|^2 - \frac{((X - P) \cdot v)^2}{|v|^2} = 6,$$

da cui si ottiene

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 - \frac{(x - 1 + 3y + z)^2}{11} = 6.$$

Sviluppando i calcoli e semplificando, si ha:

$$5x^2 + y^2 + 5z^2 - 3xy - xz - 3yz - 10x + 3y + z - 28 = 0.$$

Questa è l'equazione del cilindro di asse r e raggio di base $\sqrt{6}$. Intersecando questo cilindro con il piano π si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 5x^2 + y^2 + 5z^2 - 3xy - xz - 3yz - 10x + 3y + z - 28 = 0 \\ x - y + 2z = 0, \end{cases}$$

da cui, ricavando y dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, si ottiene

$$\begin{cases} 3(x - z)^2 - 7(x - z) - 28 = 0 \\ y = x + 2z. \end{cases}$$

Le due soluzioni della prima equazione sono $x - z = \frac{7-\sqrt{385}}{6}$ e $x - z = \frac{7+\sqrt{385}}{6}$; si ottengono così i due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x - z = \dfrac{7 - \sqrt{385}}{6} \\ y = x + 2z. \end{cases}; \qquad \begin{cases} x - z = \dfrac{7 + \sqrt{385}}{6} \\ y = x + 2z. \end{cases},$$

che sono le equazioni delle due rette cercate.

Svolgimento Esercizio 14. Dalle equazioni dei piani in questione si deduce che i vettori perpendicolari ai piani π_1 e π_2 sono rispettivamente $n_1 = {}^t(0,1,1,0)$ e $n_2 = {}^t(0,1,0,-1)$. Si osservi che una retta forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con i piani π_1 e π_2 se e solo se essa forma un angolo pari a $\frac{\pi}{6}$ con i vettori n_1 e n_2. Sia dunque $v = {}^t(0,x,y,z)$ un vettore indeterminato: imponendo a v di formare un angolo pari a $\frac{\pi}{6}$ con i vettori n_1 e n_2 si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} v \cdot n_1 = |v|\,|n_1| \cos \dfrac{\pi}{6} \\ v \cdot n_2 = |v|\,|n_2| \cos \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

che ha come unica soluzione (con molteplicità 2)

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = -z. \end{cases}$$

Ponendo, ad esempio, $z = -1$, si ottiene il vettore $v = {}^t(0,2,1,-1)$. Le rette cercate sono quindi tutte le rette parallele al vettore v e distanti 1 dal punto P: esse formano un cilindro di asse la retta passante per P e parallela a v e di raggio di base 1. L'equazione di tale cilindro si trova utilizzando la formula per la distanza di un punto da una retta (vedi l'esercizio precedente). Sviluppando i calcoli si trova, alla fine,

$$2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 2yz - 8x - 10y - 26z + 29 = 0.$$

Questa è l'equazione del luogo dei punti cercato.

Svolgimento Esercizio 15. Le equazioni della rette r sono

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Il fascio di piani di asse r ha quindi equazione

$$\lambda(x - 2y - 3) + \mu(3y - z + 3) = 0.$$

Imponendo la condizione di passaggio per P si ottiene $\lambda = \mu$; ponendo quindi $\lambda = \mu = 1$ si ottiene l'equazione del piano π:

$$\pi : x + y - z = 0.$$

Sia ora $X = {}^t(1,x,y,z)$ e sia r_X la retta passante per P e X. Ricordando la formula per la distanza di un punto da una retta, si ha

$$d(Q, r_X)^2 = |Q - P|^2 - \frac{((Q-P)\cdot(X-P))^2}{|X-P|^2},$$

da cui si ottiene

$$3 = 5 - \frac{(x - 2z + 2)^2}{x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2},$$

che, sviluppando i calcoli e semplificando, fornisce

$$x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4xz - 4x - 4y + 4z = 0.$$

Questa è l'equazione di un cono di vertice P ed asse la retta per P e Q. Le rette cercate si ottengono intersecando questo cono con il piano π:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4xz - 4x - 4y + 4z = 0 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Ricavando dalla seconda equazione $y = z - x$ e sostituendo nella prima, si ottiene $3x^2 = 0$, e quindi $x = 0$. Si noti che si è ottenuta una sola soluzione (con molteplicità 2); esiste quindi una sola retta r_1 contenuta nel piano π, passante per P e distante $\sqrt{3}$ dal punto Q (ciò significa che il piano π è tangente al cono in questione). La retta cercata ha dunque equazione

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Per determinare Q_0 basta trovare la retta per Q perpendicolare a π ed intersecarla con π. Dall'equazione di π si vede subito che un vettore perpendicolare a π è il vettore $w = {}^t(0, 1, 1, -1)$, quindi la retta cercata ha equazioni

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1. \end{cases}$$

Intersecando questa retta con il piano π si trova il punto $Q_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$.

Finalmente, per determinare la retta s è sufficiente trovare un vettore v parallelo ad s, cioè perpendicolare a w ed anche alla retta r_1. Si vede subito che i punti $A = {}^t(1, 0, 1, 1)$ e $B = {}^t(1, 0, 0, 0)$ appartengono a r_1, quindi un vettore parallelo a r_1 è il vettore $u = A - B = {}^t(0, 0, 1, 1)$. Di conseguenza, un vettore v perpendicolare a u e w è il vettore $v = u \times w = {}^t(0, -2, 1, -1)$. La retta s cercata ha quindi equazioni

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = -t. \end{cases}$$

Si noti infine che la retta s si può determinare anche come l'intersezione del piano π con il piano passante per Q_0 e perpendicolare a r_1, che ha equazione $y + z = 0$. La retta s ha quindi equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Altri Esercizi

Svolgimento Esercizio 16. I punti $A = {}^t(1,0,0,1)$ e $B = {}^t(1,0,1,0)$ appartengono alla retta r, le cui equazioni parametriche sono quindi date da $X = A + t(B - A)$, cioè

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Le rette passanti per P e incidenti la retta r sono le rette passanti per P e per il generico punto $X_t = {}^t(1,0,t,1-t)$ di r. Basta ora richiedere che l'angolo formato dai vettori $X_t - P$ e $B - A$ sia pari a $\frac{\pi}{6}$. Si deve quindi avere

$$|(X_t - P) \cdot (B - A)| = |X_t - P|\,|B - A| \cos\frac{\pi}{6},$$

che fornisce

$$|2t - 1| = \sqrt{1 + t^2 + (1-t)^2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene alla fine

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

che ha le seguenti soluzioni: $t = -1$ e $t = 2$.

In corrispondenza a questi valori di t si ottengono due punti di r, $X_{-1} = {}^t(1,0,-1,2)$ e $X_2 = {}^t(1,0,2,-1)$. Le rette cercate sono quindi le rette s e s' passanti rispettivamente per P e X_{-1} e per P e X_2. Le loro equazioni cartesiane sono quindi

$$s : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y + z = 0, \end{cases} \qquad s' : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio 17. Sia A' la matrice che descrive l'azione dell'affinità sui vettori:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Si verifica subito che ${}^tA'A' = 1$, quindi ${}^tA' = A'^{-1}$, cioè A' è una matrice ortogonale. Ciò prova che A è la matrice di una isometria dello spazio euclideo $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

Cerchiamo ora i punti uniti. Sia $X = {}^t(1,x,y,z)$; X è un punto unito se $AX = X$, cioè se

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{2}} = x \\ y = y \\ \sqrt{2} - 1 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{z}{\sqrt{2}} = z, \end{cases}$$

che equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x - \dfrac{z}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}z + \sqrt{2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Ma queste sono proprio le equazioni di una retta, che è quindi la retta r fatta di punti uniti.

La retta r trovata è parallela al vettore $u = {}^t(0,0,1,0)$. Per decidere se l'affinità di matrice A è una rotazione attorno all'asse r basta controllare se A induce o meno una rotazione dei vettori di un piano perpendicolare a r. Una base del piano perpendicolare a r è costituita dai vettori $v = {}^t(0,1,0,0)$ e $w = {}^t(0,0,0,1)$, e questi vettori vengono mandati dall'affinità di matrice A rispettivamente nei vettori $v' = A'v = \frac{1}{\sqrt{2}}v + \frac{1}{\sqrt{2}}w$ e $w' = A'w = -\frac{1}{\sqrt{2}}v + \frac{1}{\sqrt{2}}w$. La matrice della trasformazione lineare indotta dall'affinità sul piano generato dai vettori v e w è dunque (rispetto alla base data da v e w)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

che corrisponde pertanto ad una rotazione di un angolo pari a $\frac{\pi}{4}$ (attorno alla retta r).