Piano Proiettivo e Coniche

Piano Proiettivo

Esercizio 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si determini l'equazione della retta r passante per i punti $P = {}^t(p_0, p_1, p_2)$ e $Q = {}^t(q_0, q_1, q_2)$.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i due riferimenti determinati rispettivamente dai punti $P_0 = {}^t(1,0,0)$, $P_1 = {}^t(0,1,0)$, $P_2 = {}^t(0,0,1)$ con punto unità $U = {}^t(1,1,1)$, e $Q_0 = {}^t(2,1,3)$, $Q_1 = {}^t(0,1,1)$, $Q_2 = {}^t(1,0,-7)$ con punto unità $U' = {}^t(3,3,-2)$.

Si determini la matrice della proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che manda il primo riferimento nel secondo.

Esercizio 3. Si determinino i punti uniti della proiettività π di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ una proiettività diversa dall'identità e tale che f^2 sia l'identità. Si dimostri che la conoscenza di due punti uniti, P e Q, determina f in modo unico. Si determini poi una matrice di f sapendo che $P = {}^t(1,2)$ e $Q = {}^t(2,1)$.

Coniche Degeneri

Esercizio 5. Si studi la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy + 4x - 6y + 1 = 0.$$

Esercizio 6. Si studi la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - 3y^2 - 5xy + 3x + 5y - 2 = 0.$$

Iperbole

Esercizio 7. Nel piano euclideo, si studi la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y + 2 = 0.$$

Ellisse

Esercizio 8. Nel piano euclideo, si studi la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$3x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x + 2y + 2 = 0.$$

Parabola

Esercizio 9. Nel piano euclideo, si studi la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

Altri Esercizi

Esercizio 10. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x_0^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_0x_2 + 10x_1x_2 = 0.$$

Si classifichi la conica $\mathcal{C}$ nel piano affine che si ottiene prendendo come retta impropria la retta r di equazione $x_0 - x_2 = 0$. Si determinino inoltre il centro e gli asintoti della conica $\mathcal{C}$.

Fasci di Coniche

Esercizio 11. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si determini l'equazione della conica $\mathcal{C}$ passante per i punti $P_1 = {}^t(1,0,1)$, $P_2 = {}^t(1,0,0)$, $P_3 = {}^t(2,3,4)$, $P_4 = {}^t(1,1,1)$ e $P_5 = {}^t(3,-1,2)$.

Esercizio 12. Nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, immerso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nel modo usuale, si determinino le equazioni di tutte le parabole tangenti alla retta impropria r_∞ e alla retta s, di equazione affine $3x + y + 8 = 0$, nei punti di coordinate omogenee $P_\infty = {}^t(0,1,1)$ e $Q = {}^t(1,-2,-2)$ rispettivamente.

Esercizio 13. Si consideri il piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r_\infty$, dove r_∞ è la retta di equazione $x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$. Si determinino le equazioni di tutte le parabole di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ che sono tangenti alla retta s di equazione $2x_0 + x_1 - x_2 = 0$ nel punto $Q = {}^t(1,1,3)$, ed il cui asse è parallelo alla retta r di equazione $x_0 - x_1 = 0$.

Esercizio 14. Nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dotato della metrica euclidea, si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$3x^2 + 2xy + y^2 - y = 0.$$

Si verifichi che la conica $\mathcal{C}$ è tangente all'asse delle x nell'origine. Si determini (se esiste) l'equazione di un cerchio osculatore alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine. Si dica infine se esiste un cerchio iperosculatore a $\mathcal{C}$ nell'origine.

Esercizio 15. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche in $\mathbb{P}^2$ e sia $P \in \mathbb{P}^2$ un punto distinto dai punti base del fascio $\mathcal{F}$. Si dimostri che le polari di P rispetto alle coniche del fascio $\mathcal{F}$ formano un fascio di rette in $\mathbb{P}^2$.