Piano Proiettivo e Coniche

Piano Proiettivo

Svolgimento Esercizio 1. La retta r passante per P e Q corrisponde al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $P = {}^t(p_0, p_1, p_2)$ e $Q = {}^t(q_0, q_1, q_2)$. Pertanto un punto $X = {}^t(x_0, x_1, x_2)$ appartiene a r se e solo se il vettore ${}^t(x_0, x_1, x_2)$ è linearmente dipendente dai vettori ${}^t(p_0, p_1, p_2)$ e ${}^t(q_0, q_1, q_2)$, cioè se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Questa è l'equazione della retta r.

Svolgimento Esercizio 2. Bisogna cercare la matrice di un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sovrastante la proiettività in questione. Tale applicazione lineare deve essere tale che $\phi({}^t(1,0,0)) = \lambda_1 {}^t(2,1,3)$, $\phi({}^t(0,1,0)) = \lambda_2 {}^t(0,1,1)$, $\phi({}^t(0,0,1)) = \lambda_3 {}^t(1,0,-7)$, e infine $\phi({}^t(1,1,1)) = \lambda_4 {}^t(3,3,-2)$. A questo punto bisogna osservare che il fatto che U' sia il punto unità del secondo riferimento equivale a richiedere che

$$\lambda_1 {}^t(2,1,3) + \lambda_2 {}^t(0,1,1) + \lambda_3 {}^t(1,0,-7) = \lambda_4 {}^t(3,3,-2).$$

Risolvendo questo sistema si trova $\lambda_1 = \lambda_4$, $\lambda_2 = 2\lambda_4$ e $\lambda_3 = \lambda_4$. A questo punto, ponendo ad esempio $\lambda_4 = 1$, si trova che la matrice di ϕ, che è poi la matrice della proiettività cercata, è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento Esercizio 3. I punti uniti di π sono i punti $X = {}^t(x_0, x_1, x_2)$ tali che $AX = \lambda X$, e corrispondono quindi agli autospazi della matrice A. Il polinomio caratteristico di A è $\det(\lambda - A) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 14)$ e quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 4$ (con molteplicità 2) e $\lambda_2 = 14$ (con molteplicità 1). Cercando gli autovettori della matrice A si vede che esistono due autovettori linearmente indipendenti, $v_1 = {}^t(0,1,0)$ e $v_2 = {}^t(1,0,1)$, relativi all'autovalore $\lambda_1 = 4$, e un autovettore $v_3 = {}^t(1,0,-1)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = 14$. L'autospazio generato dal vettore v_3 corrisponde dunque a un punto unito $P_3 = {}^t(1,0,-1)$ di π, mentre l'autospazio di dimensione 2 generato dai vettori v_1 e v_2 corrisponde a una retta r di punti uniti, che è precisamente la retta passante per i punti $P_1 = {}^t(0,1,0)$ e $P_2 = {}^t(1,0,1)$. La retta r ha quindi equazione

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_0 - x_2 = 0.$$

Svolgimento Esercizio 4. Dati i due punti P e Q, scegliamo Q come punto improprio della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La proiettività f induce pertanto un'affinità della retta affine $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus Q$. Scegliamo ora P come origine di questa retta affine: la matrice di f è quindi la matrice di un'affinità che manda l'origine in sé, e quindi è del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dato che f^2 è l'identità, si deve avere $\alpha^2 = 1$, e dato che f non è l'identità l'unica soluzione è $\alpha = -1$. Da ciò si deduce che f è unicamente determinata dalla conoscenza dei due punti fissi P e Q.

Siano ora $P = {}^t(1, 2)$ e $Q = {}^t(2, 1)$. Ricordando che i punti uniti di f corrispondono agli autovettori della matrice che la rappresenta (i cui autovalori devono essere -1 e 1, dato che $f \neq 1$ ma $f^2 = 1$), si deduce immediatamente che una matrice che rappresenta f è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Coniche Degeneri

Svolgimento Esercizio 5. Una matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det A = 0$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è degenere. Bisogna allora determinare il rango di A, che risulta essere 1, dato che la seconda e la terza riga di A sono multiple della prima (oppure, dato che tutti i minori di ordine 2 sono nulli). Da ciò si deduce che la conica $\mathcal{C}$ è una retta, contata con molteplicità 2. Se indichiamo con

$$ax + by + c = 0$$

l'equazione di tale retta, si deve avere

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy + 4x - 6y + 1 = (ax + by + c)^2,$$

da cui si deduce che l'equazione della retta cercata è

$$2x - 3y + 1 = 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ è rappresentata in figura 1.

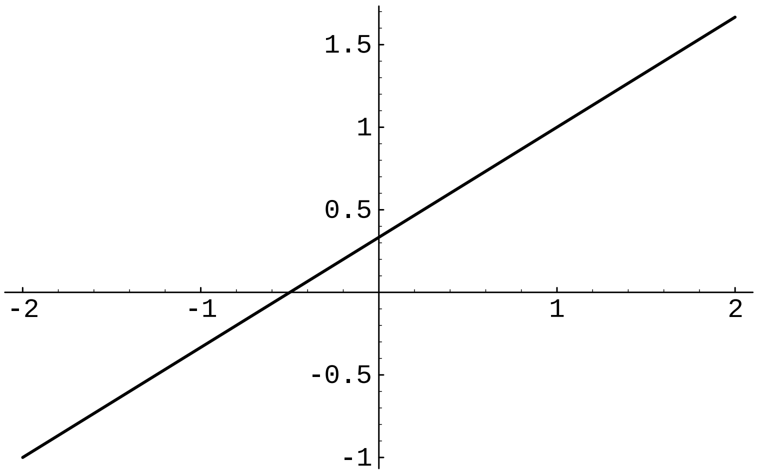

FIG. 1

Svolgimento Esercizio 6. Una matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det A = 0$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è degenere. La matrice A ha rango 2, dato che, per esempio, il minore $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ è diverso da zero. Da ciò si deduce che la conica $\mathcal{C}$ è costituita da due rette distinte r_1 e r_2.

Per calcolare le equazioni di r_1 e r_2 si può procedere come segue. Indichiamo con C il punto $r_1 \cap r_2$; per determinare C si può, ad esempio, intersecare la conica con un fascio di rette (non centrato in C!), ad esempio il fascio di rette di equazione $y = \mu$, ed imporre che vi sia un solo punto di intersezione[1]; quest'unico punto di intersezione sarà dunque il punto C (alla fine dell'esercizio è proposto un altro procedimento per determinare il punto C). Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 5xy + 3x + 5y - 2 = 0 \\ y = \mu \end{cases}$$

si ottiene

$$(*) \qquad 2x^2 + (3 - 5\mu)x - 3\mu^2 + 5\mu - 2 = 0.$$

Quest'ultima equazione ha una sola soluzione (con molteplicità 2) se e solo se il suo discriminante è nullo:

$$\Delta = 49\mu^2 - 70\mu + 25 = (7\mu - 5)^2 = 0,$$

da cui si ricava $\mu = \frac{5}{7}$. Sostituendo questo valore di μ nell'equazione $(*)$ e risolvendo, si ottiene $x = \frac{1}{7}$. Il punto C ha dunque coordinate $C = (\frac{1}{7}, \frac{5}{7})$.

Basta ora trovare altri due punti di $\mathcal{C}$, per esempio i due punti di intersezione della conica con la retta di equazione $y = 0$ (oppure $x = 0$, oppure con la retta impropria,...):

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 5xy + 3x + 5y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $P_1 = (\frac{1}{2}, 0)$ e $P_2 = (-2, 0)$. Le due rette r_1 e r_2 sono allora le rette $C + P_1$ e $C + P_2$, di cui si possono facilmente determinare le equazioni:

$$C + P_1 : 2x + y - 1 = 0,$$
$$C + P_2 : x - 3y + 2 = 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ è rappresentata in figura 2.

[1] Ciò presuppone che C non sia sulla retta impropria.

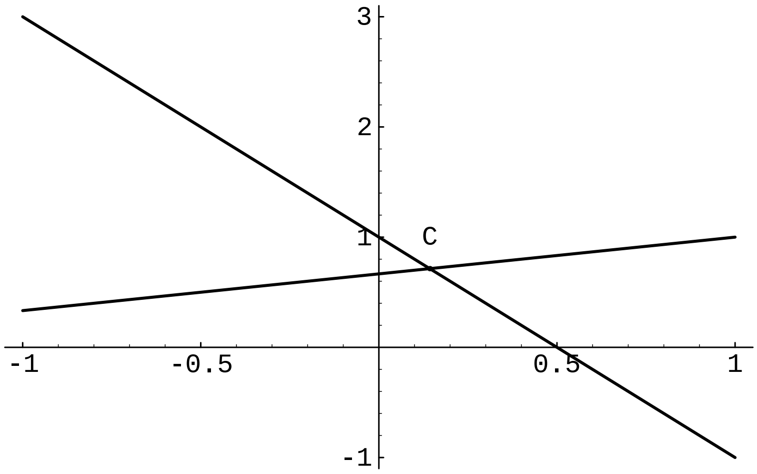

FIG. 2

Determinazione del punto C: un altro modo per determinare il punto $C = r_1 \cap r_2$ è basato sul fatto che C è l'unico punto *singolare* della conica $\mathcal{C}$, quindi le sue coordinate si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

dove $f(x,y) = 0$ è l'equazione della conica $\mathcal{C}$.

Chi non fosse convinto di ciò, può facilmente dimostrare (farlo per esercizio) che, se

$$f(x,y) = (ax + by + c)(a'x + b'y + c'),$$

allora i due sistemi lineari

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

hanno la stessa soluzione (si tratta appunto del punto C in cui si intersecano le due rette di equazione $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$).

Iperbole

Svolgimento Esercizio 7. Consideriamo il piano affine, con coordinate (x, y), immerso nel piano proiettivo, con coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2), nel modo usuale: la retta impropria r_∞ ha equazione $x_0 = 0$, e si ha: $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$.

L'equazione omogenea della conica $\mathcal{C}$ è quindi

$$2x_0^2 + x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_0x_1 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0,$$

e una matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det A = -2$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è non-degenere.

Consideriamo la sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A' = -1 < 0$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è una conica a centro e, precisamente, un'iperbole.

Centro: il centro $C = {}^t(x_0^C, x_1^C, x_2^C)$, per definizione, è il polo della retta impropria r_∞ di coordinate plückeriane $(1,0,0)$. Si trova quindi risolvendo il seguente sistema:

$$(x_0^C, x_1^C, x_2^C)A = \rho(1,0,0),$$

con $\rho \neq 0$.

Nel nostro caso si ha: $C = {}^t(1,1,1)$, quindi il centro C è il punto di coordinate affini ${}^t(1,1)$.

Per determinare le coordinate del centro si possono anche usare le seguenti formule:

$$x_0^C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad x_1^C = -\begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad x_2^C = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix},$$

ove a_{ij} sono i coefficienti della matrice A (il lettore è invitato a giustificare le formule precedenti).

Asintoti: gli asintoti sono le rette passanti per il centro C e per i punti P_∞ e Q_∞ di intersezione tra la conica e la retta impropria. Calcoliamo dunque i punti P_∞ e Q_∞:

$$\mathcal{C} \cap r_\infty : \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0^2 + x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_0x_1 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0. \end{cases}$$

Si trova $P_\infty = {}^t(0,3,1)$ e $Q_\infty = {}^t(0,1,1)$. Questi due punti rappresentano le direzioni degli asintoti: gli asintoti sono dunque le rette $C + P_\infty$, di coordinate plückeriane $(2,1,-3)$, e $C + Q_\infty$, di coordinate plückeriane $(0,-1,1)$. (Un altro modo per calcolare le equazioni degli asintoti consiste nel ricordare che essi sono le polari dei due punti P_∞ e Q_∞).

Le equazioni affini degli asintoti sono quindi:

$$\begin{aligned} C + P_\infty &: \quad x - 3y + 2 = 0, \\ C + Q_\infty &: \quad -x + y = 0. \end{aligned}$$

Assi: gli assi sono una coppia di diametri coniugati ortogonali tra loro. Si possono determinare come segue.

Come prima cosa determiniamo gli autovalori di A': nel nostro caso si trova

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{5}.$$

 Francesco Bottacin, bottacin@math.unipd.it

Gli autovettori corrispondenti sono, rispettivamente,

$$v_1 = {}^t(1+\sqrt{5}, 2), \quad v_2 = {}^t(1-\sqrt{5}, 2).$$

Gli autovettori di A' rappresentano le direzioni degli assi: precisamente, i punti di coordinate omogenee $R = {}^t(0, 1+\sqrt{5}, 2)$ e $S = {}^t(0, 1-\sqrt{5}, 2)$ sono i punti di intersezione degli assi con la retta impropria. Gli assi sono quindi le due rette $C+R$ e $C+S$, le cui coordinate plückeriane sono

$$C+R = (-1-\sqrt{5}, -3-\sqrt{5}, 4+2\sqrt{5}),$$
$$C+S = (-1+\sqrt{5}, -3+\sqrt{5}, 4-2\sqrt{5}),$$

e le cui equazioni affini sono

$$C+R = (-3-\sqrt{5})x + (4+2\sqrt{5})y - 1 - \sqrt{5} = 0,$$
$$C+S = (-3+\sqrt{5})x + (4-2\sqrt{5})y - 1 + \sqrt{5} = 0.$$

Forma canonica: la forma canonica di un'iperbole è data dalla seguente matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Gli elementi α e β sulla diagonale non sono altro che gli autovalori di A' moltiplicati per $-\frac{\det A'}{\det A}$. Nel nostro caso si trova:

$$\alpha = -\frac{1}{2}\lambda_1 = -1 + \frac{\sqrt{5}}{2},$$
$$\beta = -\frac{1}{2}\lambda_2 = -1 - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Fuochi: i fuochi reali dell'iperbole sono due punti che si trovano sull'asse focale ad una distanza d dal centro C. Per determinare i fuochi bisogna quindi determinare l'asse focale e la distanza d.

Fra i due valori α e β trovati, uno di essi è positivo (nel nostro caso α), mentre l'altro (nel nostro caso β) è negativo: l'asse focale è quello determinato dall'autovettore di A' corrispondente al valore positivo. Nel nostro caso l'asse focale è quello determinato dall'autovettore v_1 (che corrisponde all'autovalore λ_1 che, a sua volta, corrisponde ad α), ed è quindi la retta $C+R$.

Dato che si ha $\beta < 0 < \alpha$, la distanza d tra i fuochi e il centro C si calcola con la formula seguente:

$$d = \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}}.$$

Nel nostro caso si trova $d = 2\sqrt[4]{5}$.

Per trovare le coordinate affini dei fuochi, si può procedere ora come segue: si determini il versore dell'asse focale $\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. I fuochi sono i due punti F_1 e F_2 dati da:

$$F_1 = C - d\hat{v}_1, \qquad F_2 = C + d\hat{v}_1.$$

La conica $\mathcal{C}$ è rappresentata in figura 3.

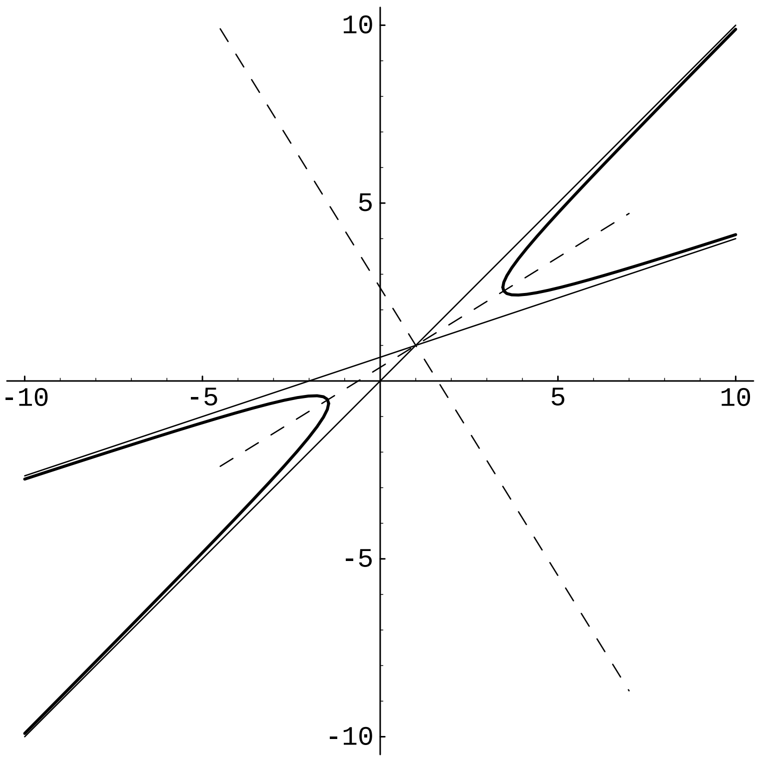

FIG. 3

Ellisse

Svolgimento Esercizio 8. Consideriamo il piano affine, con coordinate (x, y), immerso nel piano proiettivo, con coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2), nel modo usuale: la retta impropria r_∞ ha equazione $x_0 = 0$, e si ha: $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$.

L'equazione omogenea della conica $\mathcal{C}$ è quindi

$$2x_0^2 + 3x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_0x_1 + 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0,$$

e una matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det A = -35$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è non-degenere.

Consideriamo la sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A' = 8 > 0$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è una conica a centro e, precisamente, un'ellisse. Inoltre si tratta di un'ellisse a punti reali, dato che la matrice A non è definita, come si vede immediatamente calcolandone i minori principali.

Centro: il centro $C = {}^t(x_0^C, x_1^C, x_2^C)$, per definizione, è il polo della retta impropria r_∞ di coordinate plückeriane $(1, 0, 0)$. Si trova quindi risolvendo il seguente sistema:

$$(x_0^C, x_1^C, x_2^C)A = \rho(1, 0, 0),$$

con $\rho \neq 0$.

Nel nostro caso si ha: $C = {}^t(8, -14, -9)$, quindi il centro C è il punto di coordinate affini ${}^t(-\frac{7}{4}, -\frac{9}{8})$.

Per determinare le coordinate del centro si possono anche usare le seguenti formule:

$$x_0^C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad x_1^C = -\begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad x_2^C = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix},$$

ove a_{ij} sono i coefficienti della matrice A (il lettore è invitato a giustificare le formule precedenti).

Asintoti: gli asintoti sono le rette passanti per il centro C e per i punti P_∞ e Q_∞ di intersezione tra la conica e la retta impropria. Nel caso di un'ellisse, i punti P_∞ e Q_∞ sono ovviamente due punti complessi coniugati non reali (e lo stesso vale quindi per i due asintoti). Normalmente non è richiesto il calcolo degli asintoti; se vogliamo comunque determinare i punti P_∞ e Q_∞, si ha:

$$\mathcal{C} \cap r_\infty : \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0^2 + 3x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_0x_1 + 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene $P_\infty = {}^t(0, 2 + 2i\sqrt{2}, 3)$ e $Q_\infty = {}^t(0, 2 - 2i\sqrt{2}, 3)$. Questi due punti rappresentano le direzioni degli asintoti: gli asintoti sono le rette $C + P_\infty$ e $C + Q_\infty$.

Assi: gli assi sono una coppia di diametri coniugati ortogonali tra loro. Si possono determinare come segue.

Come prima cosa determiniamo gli autovalori di A': nel nostro caso si trova

$$\lambda_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}.$$

Gli autovettori corrispondenti sono, rispettivamente,

$$v_1 = {}^t(1 + \sqrt{17}, 4), \quad v_2 = {}^t(1 - \sqrt{17}, 4).$$

Gli autovettori di A' rappresentano le direzioni degli assi: precisamente, i punti di coordinate omogenee $R = {}^t(0, 1 + \sqrt{17}, 4)$ e $S = {}^t(0, 1 - \sqrt{17}, 4)$ sono i punti di intersezione degli assi con la retta impropria. Gli assi sono quindi le due rette $C + R$ e $C + S$, le cui coordinate plückeriane sono

$$C + R = (7 - 3\sqrt{17}, -5 - 3\sqrt{17}, 14 + 2\sqrt{17}),$$
$$C + S = (7 + 3\sqrt{17}, -5 + 3\sqrt{17}, 14 - 2\sqrt{17}),$$

e le cui equazioni affini sono

$$C + R = (-5 - 3\sqrt{17})x + (14 + 2\sqrt{17})y + 7 - 3\sqrt{17} = 0,$$
$$C + S = (-5 + 3\sqrt{17})x + (14 - 2\sqrt{17})y + 7 + 3\sqrt{17} = 0.$$

Forma canonica: la forma canonica di un'ellisse è data dalla seguente matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Gli elementi α e β sulla diagonale non sono altro che gli autovalori di A' moltiplicati per $-\frac{\det A'}{\det A}$. Nel nostro caso si trova:

$$\alpha = \frac{8}{35}\lambda_1 = \frac{4(7-\sqrt{17})}{35},$$
$$\beta = \frac{8}{35}\lambda_2 = \frac{4(7+\sqrt{17})}{35}.$$

Fuochi: i fuochi reali dell'ellisse sono due punti che si trovano sull'asse focale ad una distanza d dal centro C. Per determinare i fuochi bisogna quindi determinare l'asse focale e la distanza d.

Fra i due valori α e β trovati, entrambi positivi, uno di essi è minore dell'altro (perchè la conica non è un cerchio). Nel nostro caso si tratta di α. L'asse focale è quello determinato dall'autovettore di A' corrispondente al valore minore. Nel nostro caso l'asse focale è quello determinato dall'autovettore v_1 (che corrisponde all'autovalore λ_1 che, a sua volta, corrisponde ad α), ed è quindi la retta $C + R$.

Dato che $\alpha < \beta$, la distanza d tra i fuochi e il centro C si calcola con la formula seguente:

$$d = \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}}.$$

Nel nostro caso si trova $d = \frac{\sqrt{35\sqrt{17}}}{8}$.

Per trovare le coordinate affini dei fuochi, si può procedere ora come segue: si determini il versore dell'asse focale $\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. I fuochi sono i due punti F_1 e F_2 dati da:

$$F_1 = C - d\hat{v}_1, \qquad F_2 = C + d\hat{v}_1.$$

La conica $\mathcal{C}$ è rappresentata in figura 4.

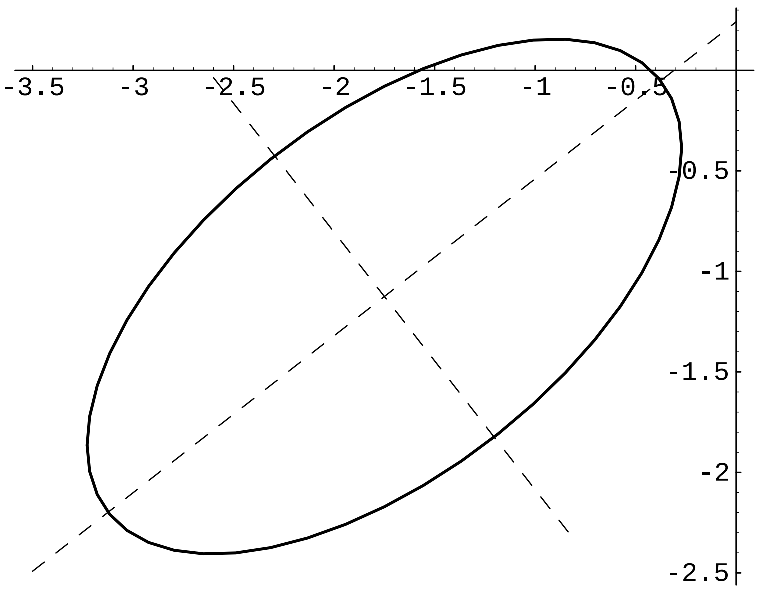

FIG. 4

Parabola

Svolgimento Esercizio 9. Consideriamo il piano affine, con coordinate (x, y), immerso nel piano proiettivo, con coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2), nel modo usuale: la retta impropria r_∞ ha equazione $x_0 = 0$, e si ha: $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$.

L'equazione omogenea della conica $\mathcal{C}$ è quindi

$$x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0,$$

e una matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det A = -16$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è non-degenere.

Consideriamo la sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A' = 0$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è una parabola.

Asse e Vertice: sia P_∞ il punto di intersezione tra la parabola e la retta impropria:

$$\mathcal{C} \cap r_\infty : \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene $P_\infty = {}^t(0, -2, 1)$. Questo punto rappresenta la direzione dell'asse. La direzione perpendicolare è rappresentata dal punto $Q_\infty = {}^t(0, 1, 2)$. L'asse della parabola è, per definizione, la polare del punto Q_∞. Le sue coordinate plückeriane sono quindi

$${}^tQ_\infty A = (0, 1, 2)A = (3, 5, 10).$$

L'asse è dunque la retta di equazione affine $5x + 10y + 3 = 0$.

Il vertice V è il punto proprio di intersezione tra l'asse e la parabola. Risolvendo il sistema, si trova $V = {}^t(25, 1, -8)$. Il vertice è quindi il punto di coordinate affini ${}^t(\frac{1}{25}, -\frac{8}{25})$.

La retta perpendicolare all'asse e passante per V è la retta $V + Q_\infty$, che non è altro che la polare di V: le sue coordinate plückeriane sono date da

$${}^tVA = (25, 1, -8)A = (8, -40, 20) = (2, -10, 5),$$

e la sua equazione affine è $-10x + 5y + 2 = 0$.

Forma canonica: la forma canonica di una parabola è data dalla seguente matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il coefficiente α è dato dalla seguente formula:

$$\alpha = \pm\lambda\sqrt{-\frac{\lambda}{\det A}},$$

ove λ è l'autovalore non nullo di A' e il segno è scelto in modo che α sia positivo.

Nel nostro caso si trova $\lambda = 5$ e quindi $\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

Fuoco e Direttrice: il fuoco di una parabola è il punto che si trova sull'asse ad una distanza d dal vertice, dalla parte "interna" della parabola (cioè nella regione di piano convessa delimitata dalla parabola). La distanza d è data dalla seguente formula:

$$d = \frac{1}{2\alpha}.$$

Nel nostro caso si trova $d = \frac{2\sqrt{5}}{25}$.

La direttrice è invece la retta parallela alla retta $V + Q_\infty$, distante d dal vertice, e contenuta nella regione "esterna" alla parabola (cioè nella regione di piano concava delimitata dalla parabola).

Il fuoco e la direttrice si possono anche determinare direttamente ricordando le loro definizioni: il fuoco è il punto di intersezione delle due tangenti (proprie) alla parabola passanti per i punti ciclici, mentre la direttrice è la polare del fuoco.

Siano allora $I = {}^t(0, 1, i)$ e $\bar{I} = {}^t(0, 1, -i)$ i punti ciclici. Sia r_I la polare di I, le cui coordinate plückeriane sono

$$r_I = {}^tIA = (-1 + 2i, 1 + 2i, 2 + 4i).$$

La retta r_I interseca la parabola nel punto P_∞ e in un altro punto R, che si calcola facilmente essere il punto $R = {}^t(-25, 3 + 4i, 6 + 8i)$. Una tangente isotropa è quindi la retta $R + I$ o, equivalentemente, la polare di R, le cui coordinate plückeriane sono

$$R + I = (4 - 3i, -10 - 5i, 5 - 10i).$$

L'altra tangente isotropa è la retta complessa coniugata, di coordinate plückeriane $(4 + 3i, -10 + 5i, 5 + 10i)$.

Il fuoco F è il punto di intersezione di queste due rette; si trova allora $F = {}^t(1, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$ (si può ora verificare che la distanza tra il vertice V e il fuoco F coincide col valore calcolato in precedenza).

La direttrice è la polare di F, ed ha quindi coordinate plückeriane $(0, -2, 1)$; la sua equazione affine è dunque $-2x + y = 0$.

La conica $\mathcal{C}$ è rappresentata in figura 5.

Altri Esercizi

Svolgimento Esercizio 10. Una matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det A = -28$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è non-degenere.

Si noti che per classificare $\mathcal{C}$ non possiamo utilizzare il determinante della sottomatrice $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, perché nel nostro caso la retta impropria non ha equazione $x_0 = 0$. Dobbiamo quindi determinare direttamente i punti P_∞ e Q_∞ di intersezione tra $\mathcal{C}$ e la retta impropria r:

$$\mathcal{C} \cap r : \quad \begin{cases} x_0 - x_2 = 0 \\ x_0^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_0x_2 + 10x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene $P_\infty = {}^t(1, 0, 1)$ e $Q_\infty = {}^t(3, -10, 3)$. Dato che la conica $\mathcal{C}$ interseca la retta impropria in due punti reali distinti, si deduce che $\mathcal{C}$ è una iperbole.

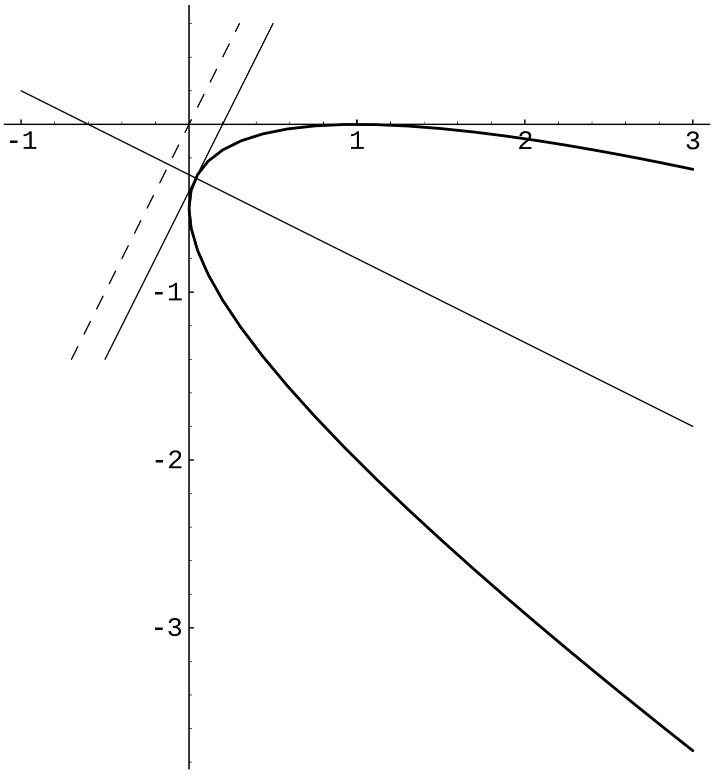

FIG. 5

Centro: il centro $C = {}^t(x_0^C, x_1^C, x_2^C)$, per definizione, è il polo della retta impropria r di coordinate plückeriane $(1, 0, -1)$. Si trova quindi risolvendo il seguente sistema:

$$(x_0^C, x_1^C, x_2^C)A = \rho(1, 0, -1),$$

con $\rho \neq 0$. Si trova quindi $C = {}^t(22, 5, -3)$.

Asintoti: gli asintoti sono le rette passanti per il centro C e per i punti P_∞ e Q_∞ di intersezione tra la conica e la retta impropria. Le equazioni degli asintoti sono quindi:

$$\begin{aligned} C + P_\infty: &\quad x_0 - 5x_1 - x_2 = 0, \\ C + Q_\infty: &\quad 3x_0 + 15x_1 + 47x_2 = 0. \end{aligned}$$

Fasci di Coniche

Svolgimento Esercizio 11. Per determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ passante per i cinque punti dati, l'idea è di considerare il fascio di coniche passante per quattro di questi punti, e poi imporre la condizione di passaggio per il quinto punto.

Consideriamo, ad esempio, il fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per P_1, P_2, P_4 e P_5. Per determinare l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ basta conoscere le equazioni di due coniche di tale fascio.

Si noti che la retta $P_1 + P_2$ ha equazione $x_1 = 0$, mentre la retta $P_4 + P_5$ ha equazione $3x_0 + x_1 - 4x_2 = 0$. Di conseguenza la conica $\mathcal{C}_1$ di equazione $x_1(3x_0 + x_1 - 4x_2) = 0$ ($\mathcal{C}_1$ è la conica degenere data dall'unione delle due rette $P_1 + P_2$ e $P_4 + P_5$) appartiene al fascio $\mathcal{F}$.

 Francesco Bottacin, bottacin@math.unipd.it

Analogamente si trova che la retta $P_1 + P_4$ ha equazione $x_0 - x_2 = 0$, mentre la retta $P_2 + P_5$ ha equazione $2x_1 + x_2 = 0$, quindi la conica $\mathcal{C}_2$ di equazione $(x_0 - x_2)(2x_1 + x_2) = 0$ ($\mathcal{C}_2$ è la conica degenere data dall'unione delle due rette $P_1 + P_4$ e $P_2 + P_5$) appartiene al fascio $\mathcal{F}$.

L'equazione del fascio $\mathcal{F}$ è quindi:

$$\lambda x_1(3x_0 + x_1 - 4x_2) + \mu(x_0 - x_2)(2x_1 + x_2) = 0.$$

Imponendo ora la condizione di passaggio per il punto P_3, si trova $-21\lambda - 20\mu = 0$, da cui si ha, ad esempio, $\lambda = 20$ e $\mu = -21$. Sostituendo questi valori nell'equazione di $\mathcal{F}$ si trova l'equazione della conica $\mathcal{C}$ cercata:

$$\mathcal{C}: \quad 20x_1^2 + 21x_2^2 + 18x_0x_1 - 21x_0x_2 - 38x_1x_2 = 0.$$

Svolgimento Esercizio 12. Le parabole cercate sono le coniche appartenenti ad un fascio di coniche bitangenti alle rette r_∞ e s nei punti P_∞ e Q rispettivamente (vedi figura 6).

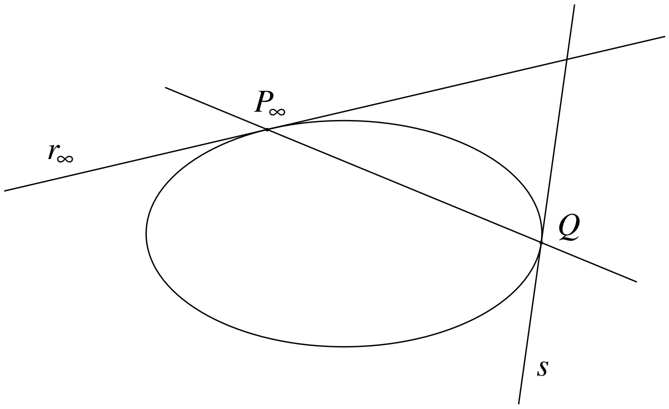

FIG. 6

Tale fascio ha due coniche degeneri: la conica $\mathcal{C}_1 = r_\infty \cup s$, unione delle due rette tangenti, e la conica $\mathcal{C}_2 = 2(P_\infty + Q)$, data dalla retta passante per P_∞ e Q, contata con molteplicità 2.

L'equazione omogenea di r_∞ è $x_0 = 0$, mentre l'equazione omogenea di s è $8x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$. La conica $\mathcal{C}_1$ ha quindi equazione $x_0(8x_0 + 3x_1 + x_2) = 0$. La retta $P_\infty + Q$ ha equazione omogenea $x_1 - x_2 = 0$, quindi l'equazione della conica $\mathcal{C}_2$ è $(x_1 - x_2)^2 = 0$. Il fascio di coniche cercato ha pertanto equazione

$$\mathcal{F}: \quad \lambda x_0(8x_0 + 3x_1 + x_2) + \mu(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Al variare dei parametri λ e μ si ottengono così tutte le coniche (comprese le coniche degeneri) tangenti alla retta r_∞ nel punto P_∞ (si tratta quindi di parabole) e tangenti alla retta s nel punto Q.

Svolgimento Esercizio 13. Dire che l'asse di queste parabole è parallelo alla retta r equivale a dire che il punto di tangenza di tutte queste parabole con la retta impropria r_∞ è il punto $P_\infty = r \cap r_\infty$. Tale punto si trova quindi risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_0 + x_1 - 3x_2 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene $P_\infty = {}^t(3,3,2)$.

Da quanto detto risulta dunque che le parabole cercate sono le coniche appartenenti ad un fascio di coniche bitangenti alle rette r_∞ e s nei punti P_∞ e Q rispettivamente.

Tale fascio ha due coniche degeneri: la conica $\mathcal{C}_1 = r_\infty \cup s$, unione delle due rette tangenti, e la conica $\mathcal{C}_2 = 2(P_\infty + Q)$, data dalla retta passante per P_∞ e Q, contata con molteplicità 2.

L'equazione omogenea di r_∞ è $x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$, mentre l'equazione omogenea di s è $2x_0 + x_1 - x_2 = 0$. La conica $\mathcal{C}_1$ ha quindi equazione $(x_0 + x_1 - 3x_2)(2x_0 + x_1 - x_2) = 0$. La retta $P_\infty + Q$ ha equazione omogenea $-7x_0 + 4x_1 + x_2 = 0$, quindi l'equazione della conica $\mathcal{C}_2$ è $(-7x_0 + 4x_1 + x_2)^2 = 0$. Il fascio di coniche cercato ha pertanto equazione

$$\mathcal{F}: \quad \lambda(x_0 + x_1 - 3x_2)(2x_0 + x_1 - x_2) + \mu(-7x_0 + 4x_1 + x_2)^2 = 0.$$

Al variare dei parametri λ e μ si ottengono così tutte le parabole cercate (comprese le coniche degeneri).

Svolgimento Esercizio 14. Consideriamo il piano affine, con coordinate (x, y), immerso nel piano proiettivo, con coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2), nel modo usuale: la retta impropria r_∞ ha equazione $x_0 = 0$, e si ha: $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$.

L'equazione omogenea della conica $\mathcal{C}$ è quindi

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_0x_2 = 0,$$

e una matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det A = -\frac{3}{4}$, quindi la conica $\mathcal{C}$ è non-degenere.

L'origine $O \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ha coordinate omogenee $O = {}^t(1,0,0)$, e appartiene alla conica $\mathcal{C}$. La sua polare, che è dunque la retta tangente a $\mathcal{C}$ in O, ha coordinate plückeriane $(1,0,0)A = (0,0,-\frac{1}{2})$, e quindi è la retta di equazione $x_2 = 0$, cioè $y = 0$, in coordinate affini. Si è così verificato che la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto O è proprio l'asse delle x.

Per determinare se esiste un cerchio osculatore alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine, consideriamo un fascio di coniche osculatrici a $\mathcal{C}$ in O, e cerchiamo se tra queste coniche ci sono dei cerchi.

Un fascio di coniche osculatrici a $\mathcal{C}$ nell'origine ha una sola conica degenere, data dall'unione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in O e di un'altra retta (qualunque) passante per O (e diversa dall'asse delle x). Sia dunque r una retta passante per l'origine, di equazione $ax_1 + bx_2 = 0$; la conica degenere del fascio in questione ha quindi equazione $x_2(ax_1 + bx_2) = 0$. Il fascio è generato da tale conica degenere e dalla conica $\mathcal{C}$, ed ha pertanto equazione

$$\mathcal{F}_{(a,b)}: \quad \lambda(3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_0x_2) + \mu x_2(ax_1 + bx_2) = 0.$$

Al variare dei parametri a e b, l'equazione precedente fornisce le equazioni di tutti i fasci di coniche osculatrici alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine.

Ricordiamo ora che una conica è un cerchio se e solo se essa passa per i due punti ciclici $I = {}^t(0,1,i)$ e $\bar{I} = {}^t(0,1,-i)$ (si osservi inoltre che, dato che le coniche in questione sono definite su $\mathbb{R}$, cioè hanno equazioni a coefficienti reali, è sufficiente controllare che il punto I appartenga alla conica; infatti in tal caso è ovvio che la conica contiene anche il punto $\bar{I}$).

Sostituendo le coordinate del punto I nell'equazione del fascio $\mathcal{F}_{(a,b)}$ si trova

$$\lambda(2+2i)+\mu(-b+ia)=0,$$

da cui, considerando la parte reale e la parte immaginaria, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2\lambda - b\mu = 0 \\ 2\lambda + a\mu = 0, \end{cases}$$

che ammette soluzioni se e solo se $a=-b$. Poniamo allora $a=-b=1$, da cui si deduce che $\lambda=1$ e $\mu=-2$ fornisce una soluzione del sistema in questione. Basta ora sostituire questi valori nell'equazioni del fascio $\mathcal{F}_{(a,b)}$ per determinare l'equazione del cerchio osculatore.

In conclusione, abbiamo così dimostrato che esiste un unico cerchio osculatore alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine. Tale cerchio ha equazione omogenea

$$3x_1^2+3x_2^2-x_0x_2=0.$$

Infine, per determinare se esiste un cerchio iperosculatore alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine, consideriamo il fascio di coniche iperosculatrici a $\mathcal{C}$ in O, e cerchiamo se tra queste coniche ci sono dei cerchi.

Il fascio di coniche iperosculatrici a $\mathcal{C}$ nell'origine ha una sola conica degenere, data dalla retta tangente a $\mathcal{C}$ in O considerata con molteplicità 2. Il fascio è generato da tale conica degenere e dalla conica $\mathcal{C}$, ed ha pertanto equazione

$$\mathcal{F}: \quad \lambda(3x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_0x_2)+\mu x_2^2=0.$$

Per vedere se tra le coniche di questo fascio ci sono dei cerchi, sostituiamo le coordinate del punto I nell'equazione del fascio, ottenendo

$$\lambda(2+2i)-\mu=0,$$

da cui si ricava $\lambda=\mu=0$. Abbiamo così dimostrato che non esiste un cerchio iperosculatore alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine.

Svolgimento Esercizio 15. Fissiamo un riferimento di $\mathbb{P}^2$, in modo da far corrispondere ad ogni conica una matrice quadrata. Siano ora A e B le matrici di due coniche del fascio $\mathcal{F}$. Tutte le coniche di $\mathcal{F}$ sono allora date dalle matrici $\lambda A+\mu B$, al variare dei parametri λ e μ. Se $P={}^t(p_0,p_1,p_2)$, le polari di P rispetto alle coniche del fascio hanno dunque coordinate plückeriane date da

$${}^tP(\lambda A+\mu B)=\lambda({}^tPA)+\mu({}^tPB).$$

Basta ora osservare che l'equazione precedente fornisce precisamente le coordinate plückeriane della generica retta del fascio generato dalle rette di coordinate plückeriane ${}^tPA$ e ${}^tPA$ (che sono le polari di P rispetto alle coniche di matrici A e B rispettivamente.