Spazi Vettoriali

Definizioni

Esercizio 1. Si dica se gli insiemi seguenti sono degli spazi vettoriali:

(1) L'insieme delle funzioni reali definite nell'intervallo $[0,1]$, continue, positive o nulle, per le operazioni di addizione e di prodotto per un numero reale.

(2) L'insieme delle funzioni reali f definite in $\mathbb{R}$, tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, per le operazioni di addizione e di prodotto per un numero reale.

(3) L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, per le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite rispettivamente da

$$x \oplus y = xy, \quad \forall x, y \in A$$
$$\lambda \cdot x = x^\lambda, \quad \forall x \in A, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(4) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 1 oppure in 4.

(5) L'insieme dei polinomi di grado uguale a n (n intero positivo).

(6) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^2$, tali che

$$f'' + \omega^2 f = 0,$$

con $\omega \in \mathbb{R}$.

(7) L'insieme delle funzioni reali $f(x)$ definite nell'intervallo $[0,1]$, continue, tali che

$$\int_0^1 f(x) \sin x \, dx = 0.$$

Basi

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi, a coefficienti reali nella variabile x, di grado ≤ 3. Si verifichi che gli insiemi seguenti sono delle basi di V:

(1) $\{1, x, x^2, x^3\}$;

(2) $\{1, 1-x, x-x^2, x^2-x^3\}$;

(3) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 2 si considerino i polinomi

$$p_1(x) = x^2 + x(1-x) + (1-x)^2$$
$$p_2(x) = x^2 + (1-x)^2$$
$$p_3(x) = x^2 + 1 + (1-x)^2$$
$$p_4(x) = x(1-x).$$

È possibile estrarre da $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ delle basi di V? In caso affermativo, trovarle tutte.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, si considerino le funzioni $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$ e $f_3(x) = \sin 3x$. Si dica se queste funzioni sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Si dica se, nei casi seguenti, i vettori v_1, v_2 e v_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. In caso negativo si descriva il sottospazio da essi generato.

(1) $v_1 = {}^t(1,1,1)$, $v_2 = {}^t(3,0,-1)$, $v_3 = {}^t(-1,1,-1)$;
(2) $v_1 = {}^t(1,2,3)$, $v_2 = {}^t(3,0,-1)$, $v_3 = {}^t(1,8,13)$;
(3) $v_1 = {}^t(1,2,-3)$, $v_2 = {}^t(1,0,-1)$, $v_3 = {}^t(1,10,-11)$.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^4$ i vettori seguenti formano:
(i) un insieme libero (cioè un insieme di vettori linearmente indipendenti)? In caso affermativo, completarlo per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$, altrimenti determinare le relazioni di dipendenza lineare tra di loro ed estrarre da questo insieme di vettori almeno un insieme libero.
(ii) un insieme di generatori? In caso affermativo, estrarne almeno una base di $\mathbb{R}^4$, altrimenti determinare la dimensione del sottospazio da essi generato.

(1) $v_1 = {}^t(1,1,1,1)$, $v_2 = {}^t(0,1,2,-1)$, $v_3 = {}^t(1,0,-2,3)$, $v_4 = {}^t(2,1,0,-1)$, $v_5 = {}^t(4,3,2,1)$;
(2) $v_1 = {}^t(1,2,3,4)$, $v_2 = {}^t(0,1,2,-1)$, $v_3 = {}^t(3,4,5,16)$;
(3) $v_1 = {}^t(1,2,3,4)$, $v_2 = {}^t(0,1,2,-1)$, $v_3 = {}^t(2,1,0,11)$, $v_4 = {}^t(3,4,5,14)$.

Esercizio 7. Si determini una base del sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^5$ costituito dai vettori ${}^t(x_1,\ldots,x_5)$ che sono soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^4$ siano $v_1 = {}^t(1,2,3,4)$ e $v_2 = {}^t(1,-2,3,-4)$. È possibile determinare due numeri reali x e y in modo tale che ${}^t(x,1,y,1) \in L\{v_1,v_2\}$? (Ricordiamo che $L\{v_1,v_2\}$ indica il sottospazio generato dai vettori v_1 e v_2.)

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale. Si dica se le affermazioni seguenti sono vere o false.

(1) Se i vettori v_1, v_2 e v_3 sono a due a due non proporzionali allora la famiglia $\{v_1,v_2,v_3\}$ è libera.
(2) Se nessuno fra i vettori $v_1,\ldots,v_r$ è combinazione lineare dei vettori rimanenti allora la famiglia $\{v_1,\ldots,v_r\}$ è libera.

Esercizio 10. In $\mathbb{R}^4$ siano $v_1 = {}^t(0,1,-2,1)$, $v_2 = {}^t(1,0,2,-1)$, $v_3 = {}^t(3,2,2,-1)$, $v_4 = {}^t(0,0,1,0)$, $v_5 = {}^t(0,0,0,1)$. Si dica se le affermazioni seguenti sono vere o false.

(1) $L\{v_1,v_2,v_3\} = L\{{}^t(1,1,0,0), {}^t(-1,1,-4,2)\}$;
(2) ${}^t(1,1,0,0) \in L\{v_1,v_2\} \cap L\{v_2,v_3,v_4\}$;
(3) $\dim(L\{v_1,v_2\} \cap L\{v_2,v_3,v_4\}) = 1$;
(4) $L\{v_1,v_2\} + L\{v_2,v_3,v_4\} = \mathbb{R}^4$;
(5) $L\{v_1,v_2,v_3\} + L\{v_4,v_5\} = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 11. Si studi la dipendenza o l'indipendenza lineare dei vettori seguenti, e si determini in ogni caso una base del sottospazio da essi generato.

(1) ${}^t(1,0,1)$, ${}^t(0,2,2)$, ${}^t(3,7,1)$, in $\mathbb{R}^3$;
(2) ${}^t(1,0,0)$, ${}^t(0,1,1)$, ${}^t(1,1,1)$, in $\mathbb{R}^3$;
(3) ${}^t(1,2,1,2,1)$, ${}^t(2,1,2,1,2)$, ${}^t(1,0,1,1,0)$, ${}^t(0,1,0,0,1)$, in $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 12. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x, a coefficienti in $\mathbb{R}$, di grado $\leq n$, con n intero positivo. Si dimostri che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$$

è una base di V. Sia poi $f(x) \in V$ e si esprima $f(x)$ come combinazione lineare dei precedenti polinomi. Chi sono i coefficienti di tale combinazione lineare?

Esercizio 13. Siano $U_t = L\{u_1, u_2\}$ e $V_t = L\{v_1, v_2\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$, con $u_1 = {}^t(1, t, 2t, 0)$, $u_2 = {}^t(t, t, t, t)$, $v_1 = {}^t(t-2, -t, -3t, t)$ e $v_2 = {}^t(2, t, 2t, 0)$.

(1) Si dica se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + V_t = \mathbb{R}^4$.
(2) Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap V_t) = 1$?
(3) Si determini una base di $U_1 \cap V_1$ e la si estenda ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 14. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = L\{v_1, v_2, v_3\}$ e $V = L\{v_4, v_5\}$, dove $v_1 = {}^t(1,2,3,4)$, $v_2 = {}^t(2,2,2,6)$, $v_3 = {}^t(0,2,4,4)$, $v_4 = {}^t(1,0,-1,2)$ e $v_5 = {}^t(2,3,0,1)$. Si determinino delle basi dei sottospazi $U \cap V$, U, V e $U + V$.

Sottospazi Vettoriali

Esercizio 15. Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subset W$ oppure $W \subset U$.

Esercizio 16. Siano U, V e W tre sottospazi di uno stesso spazio vettoriale. Si dica se è vero o falso che

$$U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W).$$

Esercizio 17. Si dica se è diretta la somma dei due seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $U = L\{{}^t(1,0,1,0), {}^t(1,2,3,4)\}$ e $V = L\{{}^t(0,1,1,1), {}^t(0,0,0,1)\}$.

Esercizio 18. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L\{{}^t(1,0,1,0), {}^t(0,1,1,1), {}^t(0,0,0,1)\}$$

e

$$V = L\{{}^t(1,0,1,0), {}^t(0,1,1,0)\}.$$

Si determini un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U = V \oplus W$, e si dica se tale W è unico.

Esercizio 19. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$,

$$U = L\{{}^t(1,0,1,0), {}^t(0,0,0,1)\}$$

e

$$V = L\{{}^t(1,0,2,0), {}^t(0,0,1,1)\},$$

esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = V \oplus W = \mathbb{R}^4$?

In caso affermativo si determini W e si dica se è unico.

Esercizio 20. Nello spazio vettoriale V dei polinomi, nella variabile x a coefficienti reali, di grado ≤ 5, si considerino i sottospazi seguenti:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{p(x) \in V \mid p(0) = 0\}, \\
U_2 &= \{p(x) \in V \mid p'(1) = 0\}, \\
U_3 &= \{p(x) \in V \mid x^2 + 1 \text{ divide } p(x)\}, \\
U_4 &= \{p(x) \in V \mid p(-x) = p(x), \forall x\}, \\
U_5 &= \{p(x) \in V \mid p(x) = xp'(x), \forall x\}.
\end{aligned}
$$

1) Si determinino delle basi dei seguenti sottospazi: U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_3$, $U_1 \cap U_2 \cap U_3$, $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4$.
2) Si determinino dei sottospazi W_1 e W_2 di V tali che $W_1 \oplus U_4 = W_2 \oplus (U_1 \cap U_3) = V$.