Spazi Vettoriali

Definizioni

Svolgimento Esercizio 1. Si tratta solo di verificare, caso per caso, se tutte le condizioni necessarie alla definizione di uno spazio vettoriale sono soddisfatte.

(1) In questo caso l'insieme in questione non è uno spazio vettoriale. In effetti non è neppure un gruppo abeliano rispetto all'operazione di somma, in quanto non contiene gli opposti dei suoi elementi: se f è una funzione continua *positiva* o nulla, la funzione opposta $-f$ sarà allora *negativa* o nulla, e non apparterrà dunque all'insieme in questione.

(2) Si verifica facilmente che l'insieme in questione è uno spazio vettoriale, ricordando che, se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ esistono, allora

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}(fg)(x) = (\lim_{x\to+\infty} f(x))(\lim_{x\to+\infty} g(x)).$$

(3) Anche in questo caso l'insieme in questione è uno spazio vettoriale. Si consiglia di verificare con cura tutte le proprietà richieste. A titolo di esempio, verifichiamo che, dati due elementi $x, y \in A$ ed uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lambda \cdot (x \oplus y) = (\lambda \cdot x) \oplus (\lambda \cdot y).$$

In base alle definizioni date, si ha: $\lambda \cdot (x \oplus y) = (xy)^\lambda$, mentre $(\lambda \cdot x) \oplus (\lambda \cdot y) = x^\lambda y^\lambda$. L'uguaglianza deriva allora dalle note proprietà delle potenze.

(4) L'insieme in questione non è uno spazio vettoriale, non essendo chiuso rispetto all'operazione di somma: infatti, sia ad esempio f una funzione tale che $f(1) = 0$ e $f(4) = 1$, e g una funzione tale che $g(1) = 2$ e $g(4) = 0$. Queste due funzioni appartengono all'insieme in questione, ma la loro somma non appartiene all'insieme dato, in quanto non si annulla né in 1 né in 4.

(5) Anche questo insieme non è uno spazio vettoriale, non essendo chiuso rispetto all'operazione di somma: infatti, siano ad esempio $p(x) = 2x^n + 1$ e $q(x) = -2x^n + 3$ due polinomi di grado n. La loro somma è $p(x) + q(x) = 4$ che non ha più grado n (almeno se $n \neq 0$).

Osservazione: è invece uno spazio vettoriale l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n.

(6) Questo insieme è uno spazio vettoriale (ciò è dovuto al fatto che l'equazione differenziale è lineare). Verifichiamo solo, a titolo di esempio, che esso è chiuso rispetto all'operazione di somma: siano dunque f e g due funzioni che soddisfano l'equazione differenziale in questione. Si ha allora:

$$\begin{aligned}(f+g)'' + \omega^2(f+g) &= f'' + g'' + \omega^2 f + \omega^2 g \\ &= (f'' + \omega^2 f) + (g'' + \omega^2 g) = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

(7) Anche questo insieme è uno spazio vettoriale (ciò è dovuto al fatto che l'operazione di integrazione è lineare). Verifichiamo solo, a titolo di esempio, che esso è chiuso rispetto all'operazione di somma: siano dunque f e g due funzioni che soddisfano l'equazione integrale in questione. Si ha allora:

$$\int_0^1 (f+g)(x)\sin x\,dx = \int_0^1 f(x)\sin x\,dx + \int_0^1 g(x)\sin x\,dx = 0+0=0.$$

Basi

Svolgimento Esercizio 2. (1) Ogni polinomio $f(x) \in V$ si scrive nella forma

$$f(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

ciò significa che i polinomi $1, x, x^2, x^3$ sono un insieme di generatori di V. Vediamo se sono anche linearmente indipendenti: se $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0_V$ (0_V indica lo zero dello spazio vettoriale V, cioè il polinomio nullo), allora, per il principio di identità dei polinomi, si deve avere $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Quindi $\{1, x, x^2, x^3\}$ è una base di V, da cui si deduce, tra l'altro che V ha dimensione 4.

(2) Anche in questo caso bisognerebbe dimostrare che i polinomi in questione sono un insieme di generatori e che sono linearmente indipendenti. Tuttavia sapendo che $\dim V = 4$, che è anche il numero dei polinomi della ipotetica base, è sufficiente effettuare una sola delle due verifiche (perché?). Verifichiamo allora, ad esempio, che questi sono un insieme di generatori, e cioè che ogni polinomio $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ si può scrivere nella forma $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(1-x) + \lambda_2(x-x^2) + \lambda_3(x^2-x^3)$. Sviluppando i calcoli ed uguagliando i coefficienti delle successive potenze di x, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = a_0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 = a_1 \\ \lambda_3 - \lambda_2 = a_2 \\ -\lambda_3 = a_3 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$\begin{cases} \lambda_3 = -a_3 \\ \lambda_2 = -a_2 - a_3 \\ \lambda_1 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ \lambda_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{cases}$$

Si conclude che i polinomi in questione sono un insieme di generatori, e dunque, essendo nel numero giusto, sono una base di V.

(3) In base alle osservazioni fatte nel punto (2) è sufficiente dimostrare che i polinomi in questione sono linearmente indipendenti (oppure che sono un insieme di generatori): sia dunque

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+x+x^2) + \lambda_3(1+x+x^2+x^3) = 0.$$

Sviluppando i calcoli ed uguagliando a zero i coefficienti, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Si conclude così che i polinomi in questione sono linearmente indipendenti, e dunque, essendo nel numero giusto, sono una base di V.

Svolgimento Esercizio 3. Lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 2 ha dimensione 3. Infatti una sua base è costituita dai tre polinomi $\{1, x, x^2\}$ (ogni polinomio di grado ≤ 2 si scrive, in modo unico, come combinazione lineare $a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2$ di questi tre polinomi).

Con un semplice calcolo si verifica che $p_3(x) = 2p_1(x)$, quindi, se da quei quattro polinomi si può estrarre una base, tale base deve essere data da $\{p_1(x), p_2(x), p_4(x)\}$ (o, equivalentemente, da $\{p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$). Tuttavia si verifica che $p_4(x) = p_2(x) - p_1(x)$, quindi i polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_4(x)$ sono linearmente dipendenti e non costituiscono pertanto una base di V. In conclusione, dai quattro polinomi dati non è possibile estrarre una base di V.

Svolgimento Esercizio 4. Consideriamo una combinazione lineare $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$ delle funzioni f_1, f_2 e f_3. Supponiamo che tale combinazione lineare sia nulla (cioè sia la *funzione* nulla). Si ha dunque:

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dato che l'espressione precedente deve essere nulla per ogni valore di x, attribuendo ad x dei valori particolari otteniamo (ad esempio):

$$\begin{aligned} x = \pi/2: &\quad a_1 - a_3 = 0, \\ x = \pi/3: &\quad \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 = 0, \\ x = \pi/4: &\quad \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + a_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} a_3 = 0. \end{aligned}$$

L'unica soluzione di tali equazioni è: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ciò dimostra che le tre funzioni date sono linearmente indipendenti.

Svolgimento Esercizio 5. Eseguiamo, a titolo di esempio, la verifica solo nel caso (1). Dato che i vettori sono tre, e cioè il numero giusto per poter essere una base di $\mathbb{R}^3$, basterà solo controllare se sono linearmente indipendenti (oppure se sono un insieme di generatori). Posto $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ciò dimostra che questi tre vettori sono linearmente indipendenti e, di conseguenza, sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento Esercizio 6. (1) I cinque vettori dati sono sicuramenti linearmente dipendenti, dato che il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ (che coincide con la dimensione dello spazio vettoriale) è 4. Infatti si vede immediatamente che $v_5 = 2v_1 + v_4$. Si verifica inoltre, con un facile calcolo, che i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti, e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

(2) I tre vettori dati sicuramente non sono dei generatori di $\mathbb{R}^4$ (che ha dimensione 4). Si verifica comunque che essi sono linearmente indipendenti. Se introduciamo un quarto vettore $v_4 = {}^t(0,0,1,0)$ (ad esempio), si verifica facilmente che v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti, e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

(3) Si verifica che i quattro vettori dati sono linearmente dipendenti, infatti $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Pertanto essi non costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$. Si scopre poi che anche v_1 è combinazione lineare di v_2 e v_3, si ha infatti $v_1 = \frac{3}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$. In conclusione i vettori v_1 e v_4 appartengono al sottospazio generato da v_2 e v_3. Infine si verifica facilmente che v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. In conclusione, i quattro vettori dati generano un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$, una cui base è data, ad esempio, dai vettori v_2 e v_3. Per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$ si possono considerare i vettori v_2, v_3, ${}^t(0,0,1,0)$ e ${}^t(0,0,0,1)$, che sono, come si verifica facilmente, linearmente indipendenti.

Svolgimento Esercizio 7. Risolvendo il sistema si ottiene (ad esempio esplicitando x_1, x_4 e x_5 in funzione di x_2 e x_3):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_5 = x_2 + 3x_3 \\ x_4 = \dfrac{5}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Tale sistema ha dunque infinite soluzioni, dipendenti da due parametri. In altre parole, lo spazio V delle soluzioni ha dimensione 2. Per trovare una base di V è allora sufficiente trovare due vettori, linearmente indipendenti, che siano soluzioni del sistema precedente. Tali vettori si trovano semplicemente attribuendo dei valori "qualunque" alle variabili libere x_2 e x_3 (facendo attenzione a che i vettori trovati siano linearmente indipendenti!). In pratica sarà sufficiente attribuire alle variabili libere alternativamente i valori 0 e 1; saremo così sicuri di ottenere dei vettori linearmente indipendenti (perché?). Ponendo dunque $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, si ottiene il vettore ${}^t(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{5}{2}, 1)$, mentre per $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$ si ha ${}^t(-\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, 3)$. Questi due vettori sono una base di V.

Svolgimento Esercizio 8. Il vettore ${}^t(x,1,y,1)$ appartiene al sottospazio generato da v_1 e v_2 se e solo se esso si può esprimere come combinazione lineare di v_1 e v_2:

$${}^t(x,1,y,1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

La seconda e la quarta equazione del sistema ottenuto sono, rispettivamente: $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 1$ e $4\lambda_1 - 4\lambda_2 = 1$, che non hanno soluzioni comuni. Di conseguenza ${}^t(x,1,y,1) \notin L\{v_1, v_2\}$.

Svolgimento Esercizio 9. (1) L'affermazione è falsa. Per dimostrarne la falsità basta fornire un controesempio: sia $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = {}^t(1,0)$, $v_2 = {}^t(0,1)$, $v_3 = {}^t(1,1)$. È evidente che tali vettori sono a due a due non proporzionali, ma non possono essere linearmente indipendenti, dato che la dimensione di $\mathbb{R}^2$ è 2.

(2) L'affermazione in questione è vera. Infatti se fosse falsa, cioè se i vettori $v_1, \ldots, v_r$ fossero linearmente dipendenti, si avrebbe

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = 0,$$

con i coefficienti λ_i non tutti nulli. Supponiamo allora che $\lambda_j \neq 0$. Si ha dunque

$$v_j = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i,$$

e quindi il vettore v_j sarebbe combinazione lineare dei rimanenti, contro l'ipotesi.

Svolgimento Esercizio 10. Per semplicità di notazione poniamo $u_1 = {}^t(1,1,0,0)$ e $u_2 = {}^t(-1,1,-4,2)$.

(1) Si ha: $v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, $v_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)$, $v_3 = \frac{1}{2}(5u_1 - u_2)$, quindi $L\{v_1, v_2, v_3\} \subset L\{u_1, u_2\}$.

Viceversa, si ha anche: $u_1 = v_1 + v_2$ e $u_2 = v_1 - v_2$, quindi $L\{u_1, u_2\} \subset L\{v_1, v_2, v_3\}$. Quindi si conclude che $L\{v_1, v_2, v_3\} = L\{u_1, u_2\}$.

(2) Abbiamo visto al punto (1) che $u_1 \in L\{v_1, v_2\}$. Dato che $u_1 = \frac{1}{2}(v_3 - v_2)$, si ha anche $u_1 \in L\{v_2, v_3, v_4\}$, e quindi $u_1 \in L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\}$.

(3) Dato che $v_2 \in L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\}$, si ha $\dim(L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\}) \geq 1$. Ma abbiamo visto al punto (1) che anche $u_1 \in L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\}$, e i vettori u_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\}) \geq 2$. D'altra parte $L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\} \subset L\{v_1, v_2\}$, quindi $\dim(L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\}) \leq 2$. Si conclude quindi che $\dim(L\{v_1, v_2\} \cap L\{v_2, v_3, v_4\}) = 2$.

(4) $L\{v_1, v_2\} + L\{v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^4$ se e solo se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Si ha però $v_3 = 2v_1 + 3v_2$, quindi i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 non sono linearmente indipendenti.

(5) $L\{v_1, v_2, v_3\} + L\{v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$ se e solo se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 generano $\mathbb{R}^4$. Si verifica facilmente che i vettori v_1, v_2, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di $\mathbb{R}^4$. A maggior ragione quindi i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 generano tutto $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento Esercizio 11. (1) Si verifica facilmente che i tre vettori dati sono linearmente indipendenti, e quindi sono una base di $\mathbb{R}^3$.

(2) Dato che il terzo vettore è la somma dei due precedenti, i tre vettori dati non sono una base di $\mathbb{R}^3$. Una base del sottospazio da essi generato è costituita da due qualunque vettori scelti tra i tre dati.

(3) I primi tre vettori sono linearmente indipendenti, mentre il quarto è combinazione lineare dei primi tre. Il sottospazio da essi generato ha pertanto dimensione tre, ed una sua base è data, ad esempio, dai primi tre vettori.

Svolgimento Esercizio 12. Lo spazio vettoriale V ha dimensione $n+1$ (una sua base è $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$). Per dimostrare che $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$ è una base di V è allora sufficiente dimostrare che tali polinomi sono linearmente indipendenti. Sia

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_n(x-a)^n = 0.$$

Osserviamo che nell'espressione precedente il termine di grado massimo è $\lambda_n x^n$, da cui si deduce che $\lambda_n = 0$. Si ottiene allora

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_{n-1}(x-a)^{n-1} = 0.$$

In questa espressione il termine di grado massimo è $\lambda_{n-1}x^{n-1}$, da cui si deduce che $\lambda_{n-1} = 0$.

Continuando in questo modo si dimostra che tutti i coefficienti λ_i sono nulli, e quindi i vettori in questione sono linearmente indipendenti, e sono dunque una base di V.

Sia ora $f(x) \in V$ e poniamo

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_n(x-a)^n.$$

Valutando l'espressione precedente per $x = a$, si ottiene $f(a) = \lambda_0$. Per determinare poi λ_1 è sufficiente derivare tale espressione, ottenendo

$$f'(x) = \lambda_1 + 2\lambda_2(x-a) + 3\lambda_3(x-a)^2 + \cdots + n\lambda_n(x-a)^{n-1},$$

e poi valutarla per $x = a$, ottenendo $\lambda_1 = f'(a)$. Derivando ancora una volta, e valutando sempre per $x = a$, si ottiene $\lambda_2 = f''(a)/2$. Continuando in questo modo si dimostra che $\lambda_i = f^{(i)}(a)/i!$, per $0 \leq i \leq n$. In conclusione si è dimostrato che, rispetto alla base $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$, ogni polinomio di grado $\leq n$ si può scrivere nella forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Questa non è altro che la formula di Taylor!.

Svolgimento Esercizio 13. (1) Innanzitutto si ha $U_t + V_t = L\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$. Notiamo che $u_2 - 2u_1 = v_1$, ciò prova che i vettori u_1, u_2, v_1, v_2 sono linearmente dipendenti, quindi non sono una base di $\mathbb{R}^4$. Di conseguenza $U_t + V_t$ non è mai uguale a $\mathbb{R}^4$.

(2) Per quanto visto nel punto (1), si ha $v_1 \in U_t \cap V_t$, per ogni t. Di conseguenza è $\dim(U_t \cap V_t) \geq 1$, per ogni t. Tuttavia si ha anche $\dim(U_t \cap V_t) \leq 2$, dato che U_t e V_t hanno al più dimensione 2, inoltre $\dim(U_t \cap V_t) = 2$ se e solo se $U_t = V_t$ e $\dim U_t = 2$. Cerchiamo dunque per quali valori di t è $U_t = V_t$. Dato che $v_1 \in U_t \cap V_t$, per ogni t, basta vedere per quali valori di t si può scrivere v_2 come combinazione lineare dei vettori u_1 e u_2: $v_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + t\lambda_2 = 2 \\ t\lambda_1 + t\lambda_2 = t \\ 2t\lambda_1 + t\lambda_2 = 2t \\ t\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione se e solo se $t = 0$. Quindi, per $t = 0$, si ha $U_t = V_t$, solo che ora è $\dim U_t = \dim V_t = 1$, e quindi anche in questo caso la dimensione di $U_t \cap V_t$ è 1. In conclusione, $\dim(U_t \cap V_t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(3) Per quanto visto nei punti precedenti, v_1 è una base di $U_t \cap V_t$, per ogni t. Ponendo $t = 1$ si ottiene dunque $v_1 = {}^t(-1, -1, -3, 1)$. Per completare questa base ad una base di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente trovare altri tre vettori w_1, w_2 e w_3 in modo che v_1, w_1, w_2, w_3 siano linearmente indipendenti. Si verifica facilmente che $w_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$, $w_2 = {}^t(0, 1, 0, 0)$ e $w_3 = {}^t(0, 0, 1, 0)$ vanno bene.

Svolgimento Esercizio 14. Un vettore $w \in U \cap V$ si può scrivere nella forma seguente:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_4 v_4 + \lambda_4 v_5.$$

Risolvendo il sistema così ottenuto si trova che:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_4 \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}\lambda_4 \\ \lambda_3 = \dfrac{3}{2}\lambda_4 \\ \lambda_5 = 0. \end{cases}$$

Pertanto lo spazio vettoriale $U \cap V$ ha dimensione 1 ed una sua base è data dal vettore w che si ottiene ponendo, ad esempio, $\lambda_4 = 2$, nella soluzione precedentemente trovata: $w = 4v_1 - v_2 - 3v_3 = {}^t(2, 0, -2, -2)$.

Una base di U è data dai vettori v_1, v_2 e v_3, dato che essi sono linearmente indipendenti (la verifica è immediata).

Anche i vettori v_4 e v_5 sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di V.

Infine, si vede facilmente che i vettori v_1, v_2, v_3 e v_5 sono linearmente indipendenti (mentre v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3). Pertanto lo spazio vettoriale $U + V$ coincide con $\mathbb{R}^4$ e una sua base è data da $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ (oppure si prenda la base canonica di $\mathbb{R}^4$).

Sottospazi Vettoriali

Svolgimento Esercizio 15. Se $U \subset W$ (risp. $W \subset U$) allora $U \cup W = W$ (risp. $U \cup W = U$) ed è dunque un sottospazio vettoriale.

Viceversa, supponiamo che $U \cup W$ sia un sottospazio vettoriale, ma $U \not\subset W$ e $W \not\subset U$. Ciò significa che esiste un vettore $u \in U$ con $u \notin W$ ed un vettore $w \in W$ con $w \notin U$. Dato che $u, w \in U \cup W$, e questo è uno spazio vettoriale, si deve avere $u + w \in U \cup W$, e dunque $u + w \in U$ oppure $u + w \in W$. Se $u + w \in U$, si ha $u + w = u' \in U$ e dunque $w = u' - u \in U$, contro l'ipotesi che $w \notin U$. Analogamente se fosse $u + w \in W$ si concluderebbe che $u \in W$, contro l'ipotesi. Da questa conclusione assurda si deduce allora che l'ipotesi è falsa, ossia che $U \cup W$ non può essere un sottospazio vettoriale se $U \not\subset W$ e $W \not\subset U$.

Svolgimento Esercizio 16. Tale uguaglianza è falsa. Per provarlo basta fornire un controesempio: in $\mathbb{R}^2$ si considerino i sottospazi $U = L\{{}^t(1, 1)\}$, $V = L\{{}^t(1, 0)\}$ e $W = L\{{}^t(0, 1)\}$. Si ha allora $U \cap (V + W) = U \cap \mathbb{R}^2 = U$, mentre $(U \cap V) + (U \cap W) = \{0\} + \{0\} = \{0\}$.

Svolgimento Esercizio 17. Dire che la somma di due sottospazi vettoriali è diretta equivale a dire che la loro intersezione è nulla (cioè ridotta al vettore nullo). Un vettore appartiene all'intersezione di U di V se e solo se si può scrivere nel modo seguente:

$$w = \lambda_1 {}^t(1, 0, 1, 0) + \lambda_2 {}^t(1, 2, 3, 4) = \mu_1 {}^t(0, 1, 1, 1) + \mu_2 {}^t(0, 0, 0, 1).$$

Risolvendo il sistema così ottenuto si scopre che, ad esempio, il vettore $w = {}^t(-1, 1, 2, 2)$ appartiene a $U \cap V$. Da ciò si deduce che la somma di U e V non è diretta.

Svolgimento Esercizio 18. Poniamo $u_1 = {}^t(1,0,1,0)$, $u_2 = {}^t(0,1,1,1)$, $u_3 = {}^t(0,0,0,1)$, $v = {}^t(0,1,1,0)$, in modo che $U = L\{u_1,u_2,u_3\}$ e $V = L\{u_1,v\}$. I vettori u_1, u_2 e u_3 sono linearmente indipendenti, quindi $\dim U = 3$. Anche u_1 e v sono linearmente indipendenti, quindi $\dim V = 2$. Inoltre $v = u_2 - u_3$, quindi $V \subset U$.

Per ragioni di dimensione un sottospazio W tale che $V \oplus W = U$ deve avere dimensione 1, sia quindi w una sua base. Il vettore w deve soddisfare le seguenti condizioni: (i) $w \notin V$, e (ii) u_1, v e w devono generare U. Si vede allora facilmente che $w = u_3$ soddisfa le condizioni richieste. Altrettanto facilmente si vede che anche la scelta $w = u_2$ soddisfa le condizioni richieste; si deduce pertanto che il sottospazio W richiesto esiste ma non è unico.

Svolgimento Esercizio 19. Poniamo $u_1 = {}^t(1,0,1,0)$, $u_2 = {}^t(0,0,0,1)$, $v_1 = {}^t(1,0,2,0)$, $v_2 = {}^t(0,0,1,1)$. I sottospazi U e V hanno entrambi dimensione 2 (la verifica è immediata), pertanto un sottospazio W con le proprietà richieste, se esiste, deve avere dimensione 2: poniamo allora $W = L\{w_1,w_2\}$. Il problema si riduce allora a determinare due vettori w_1 e w_2 tali che $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$ e $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ siano entrambe delle basi di $\mathbb{R}^4$. Si scopre facilmente che i vettori $w_1 = {}^t(1,0,0,0)$ e $w_2 = {}^t(0,1,0,0)$ soddisfano le proprietà richieste, quindi un tale sottospazio W esiste. Tuttavia anche la scelta $w_1 = {}^t(1,0,0,0)$ e $w_2 = {}^t(0,1,1,0)$ fornisce un sottospazio W (diverso dal precedente) che soddisfa le condizioni richieste. Si conclude quindi che, come nell'esercizio precedente, tale sottospazio W non è unico.

Svolgimento Esercizio 20. (1) Ogni polinomio di grado ≤ 5 si scrive in modo unico come segue:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5.$$

Da ciò si deduce che lo spazio vettoriale V ha dimensione 6, ed una sua base è data dai polinomi 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5.

La condizione $p(0) = 0$ equivale a $a_0 = 0$. Il sottospazio U_1 è quindi costituito dai polinomi della forma

$$p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5.$$

Si deduce che U_1 ha dimensione 5 ed una sua base è $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$.

La condizione $p'(1) = 0$ equivale a $a_1 = -2a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 5a_5$. Il sottospazio U_2 è quindi costituito dai polinomi della forma

$$p(x) = a_0 + (-2a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 5a_5)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5.$$

Si deduce che U_2 ha dimensione 5 ed una sua base è $\{1, x^2-2x, x^3-3x, x^4-4x, x^5-5x\}$.

La condizione che $p(x)$ sia divisibile per x^2+1 equivale a dire che $p(x)$ si scrive come segue:

$$p(x) = (x^2+1)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3).$$

Si deduce che U_3 ha dimensione 4 ed una sua base è $\{(x^2+1), (x^2+1)x, (x^2+1)x^2, (x^2+1)x^3\}$.

La condizione $p(-x) = p(x)$ equivale a $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Il sottospazio U_4 è quindi costituito dai polinomi della forma

$$p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4.$$

Si deduce che U_4 ha dimensione 3 ed una sua base è $\{1, x^2, x^4\}$.

La condizione $p(x) = xp'(x)$ equivale a $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Il sottospazio U_5 è quindi costituito dai polinomi della forma

$$p(x) = a_1 x.$$

Si deduce che U_5 ha dimensione 1 ed una sua base è $\{x\}$.

I polinomi in $U_1 \cap U_2$ devono soddisfare contemporaneamente le condizioni $a_0 = 0$ e $a_1 = -2a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 5a_5$. Il sottospazio $U_1 \cap U_2$ è quindi costituito dai polinomi della forma

$$p(x) = (-2a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 5a_5)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5.$$

Si deduce che $U_1 \cap U_2$ ha dimensione 4 ed una sua base è $\{x^2 - 2x, x^3 - 3x, x^4 - 4x, x^5 - 5x\}$.

$U_1 \cap U_3$ è costituito dai polinomi della forma

$$p(x) = (x^2 + 1)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3),$$

tali che $p(0) = 0$, che equivale a $b_0 = 0$. Si deduce che $U_1 \cap U_3$ ha dimensione 3 ed una sua base è $\{(x^2 + 1)x, (x^2 + 1)x^2, (x^2 + 1)x^3\}$.

Imponendo ai polinomi in $U_1 \cap U_3$ di soddisfare alla condizione che definisce U_2, si scopre che deve essere $b_1 = \frac{3}{2}b_2 - 2b_3$. Il sottospazio $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ha quindi dimensione 2 ed una sua base è $\{(x^2 + 1)(2x^2 - 3x), (x^2 + 1)(x^3 - 2x)\}$.

Per terminare, si vede ora facilmente che $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4 = 0$.

(2) Ricordando che la base di U_4 trovata precedentemente è $\{1, x^2, x^4\}$, si deduce che un sottospazio W_1 che soddisfa le condizioni richieste è, ad esempio, $W_1 = L\{x, x^3, x^5\}$.

Analogamente, osservando che il sottospazio $U_1 \cap U_3$ ha dimensione 3 e non contiene polinomi di grado ≤ 2, si deduce che il sottospazio W_2 generato dai polinomi 1, x e x^2 soddisfa le condizioni richieste.