

---

**Esame di Geometria (laurea in Fisica)**  
prova scritta del 16 giugno 2000

---

**ESERCIZIO 1.** Si consideri uno spazio vettoriale reale  $V$ , di dimensione 6, e sia  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_6\}$  una sua base.

(a) Dati i sottospazi  $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ,  $W = \langle v_4, v_5, v_6 \rangle$  e

$$Z = \langle v_1 + v_2 + 3v_4 + 2v_5 - v_6, v_1 - v_3 + v_5 - v_6, -2v_1 + v_3 - 3v_4 - 2v_5 + v_6 \rangle,$$

si verifichi che  $Z$  è il grafico di un'applicazione lineare  $\phi : U \rightarrow W$  e si determinino  $\ker\phi$ ,  $\text{im}\phi$  e la matrice di  $\phi$  rispetto alle basi date di  $U$  e  $W$ .

(b) Sia  $\Gamma_\psi \subseteq V$  il grafico di un'applicazione lineare  $\psi : U \rightarrow W$ . Si mostri che  $\ker\phi \subseteq \ker\psi$  se, e solo se,  $Z \cap U \subseteq \Gamma_\psi$ .

*Svolgimento.* (a). Un sottospazio  $Z \subset U \oplus W$  è il grafico di un'applicazione lineare  $\phi : U \rightarrow W$  se, e solo se,  $\dim Z = \dim U$  e  $Z \cap W = \langle 0 \rangle$ . Indicata con  $A$  la matrice che ha come colonne le coordinate dei generatori di  $Z$ , si può osservare che il minore estratto dalle prime tre righe è uguale ad 1 e quindi  $\dim Z = 3$  e  $Z + W = V$ . Ciò è sufficiente per concludere che  $Z$  è il grafico di un'applicazione lineare. Per determinare la matrice di  $\phi$ , è sufficiente osservare che, si ha  $AP = A'$ , ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) \quad \text{ed} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice di  $\phi$  rispetto alle basi date di  $U$  e  $W$  è  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Infine si ha  $\ker\phi = \langle -v_1 + v_2 + v_3 \rangle$  ed  $\text{im}\phi = \langle 3v_4 + 2v_5 - v_6, v_5 - v_6 \rangle$ .

(b). Ricordiamo che, se un sottospazio  $Z \subset U \oplus W$  è il grafico di un'applicazione lineare  $\phi : U \rightarrow W$ , dato un vettore  $u_0 \in U$ , esiste un unico vettore  $u_0 + w_0 \in Z$ , con  $w_0 \in W$  e, in particolare,  $w_0 = \phi(u_0)$ . Dunque,  $u_0 \in \ker\phi$  se, e solo se, si può prendere  $w_0 = 0$ , ovvero se, e solo se,  $u_0 = u_0 + 0 \in Z$ . Dunque  $\ker\phi = U \cap Z$ . Da ciò si conclude che  $\ker\phi \subseteq \ker\psi$  se, e solo se,  $Z \cap U \subseteq \Gamma_\psi \cap U$  e quindi se, e solo se,  $Z \cap U \subseteq \Gamma_\psi$ .  $\square$

**ESERCIZIO 2.** Si consideri lo spazio vettoriale  $M_n(C)$  delle matrici quadrate di ordine  $n$ , ad elementi nel campo  $C$ . Si mostri che, fissata comunque una forma lineare  $\alpha : M_n(C) \rightarrow C$ , esiste una matrice  $A \in M_n(C)$  tale che  $\alpha(X) = \text{tr}(AX)$  per ogni  $X \in M_n(C)$ . Si deduca da ciò il fatto che, per ogni spazio vettoriale di dimensione finita  $V$ , lo spazio vettoriale  $\text{Hom}_C(V, V)$  è canonicamente isomorfo al suo duale.

*Svolgimento.* Consideriamo la base canonica  $\{\varepsilon(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$  di  $M_n(C)$  ed osserviamo che, data una qualunque matrice  $A \in M_n(C)$ , si ha<sup>(\*)</sup>

$$\text{tr}(A\varepsilon(i, j)) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{ji} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix} = a_{ji}.$$

---

<sup>(\*)</sup> Ovvero, la matrice prodotto  $A\varepsilon(i, j)$  ha tutte le entrate nulle, eccetto la  $j$ -esima colonna, ove compare la  $i$ -esima colonna della matrice  $A$ .

Dunque, data una forma lineare  $\alpha$ , e posto  $a_{ij} := \alpha(\varepsilon(j, i))$ , per  $1 \leq i, j \leq n$ , si consideri la matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  e si osservi che le forme lineari  $\alpha$  e  $X \mapsto \text{tr}(AX)$  coincidono su una base di  $M_n(\mathbb{C})$  e quindi  $\alpha(X) = \text{tr}(AX)$  per ogni matrice  $X$ .

L'ultima affermazione discende immediatamente da quanto visto e dall'osservazione che la traccia di un endomorfismo  $\phi : V \rightarrow V$  non dipende dalla scelta di una sua matrice  $A = \alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}(\phi)$ , e quindi che la dualità definita su  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$  ponendo  $(\phi, \psi) \mapsto \text{tr}(\phi \circ \psi)$ , non dipende dalla scelta di una base di  $V$  e dalla conseguente identificazione tra  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$  ed  $M_n(\mathbb{C})$ .  $\square$

**ESERCIZIO 3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n$ , dotato di una forma hermitiana  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , definita positiva, ed indichiamo con  $\|v\| := \sqrt{h(v, v)}$  la norma di un vettore  $v \in V$ . Sia dato un endomorfismo  $\phi : V \rightarrow V$  e si fissi una base ortonormale  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$ . Possiamo considerare i due numeri reali

$$\|\phi\|_0 := \sup \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| = 1 \} \quad \text{e} \quad \|\phi\|_1 := \max \{ |a_{ij}| \mid 1 \leq i, j \leq n \}$$

ove  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}(\phi)$  è la matrice di  $\phi$  rispetto alla base fissata.

Si mostri che esistono due numeri reali positivi  $c_1$  e  $c_2$ , indipendenti da  $\phi$ , tali che  $c_1 \|\phi\|_1 \leq \|\phi\|_0 \leq c_2 \|\phi\|_1$ .

*Svolgimento.* Poichè i vettori  $v_1, \dots, v_n$  formano una base ortonormale di  $V$ , fissati comunque  $i$  e  $j$ , con  $1 \leq i, j \leq n$ , si ha

$$|a_{ij}| = |a_{ij}| \|v_i\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \right\| = \|\phi(v_j)\| \leq \|\phi\|_0$$

e quindi  $\|\phi\|_1 \leq \|\phi\|_0$ .

D'altra parte, per ogni vettore della base data, si ha

$$\|\phi(v_j)\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq n \|\phi\|_1,$$

e quindi, dato un vettore  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ , con  $|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1$ , si ha

$$\|\phi(v)\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\phi(v_j)\| \leq n \|\phi\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| \leq n^2 \|\phi\|_1;$$

da cui si può concludere che  $\|\phi\|_0 \leq n^2 \|\phi\|_1$ <sup>(†)</sup>. È chiaro che le due disuguaglianze che abbiamo dimostrato, valgono per ogni endomorfismo  $\phi$  di  $V$ .  $\square$

**ESERCIZIO 4.** Si consideri una matrice di Jordan di ordine  $n$ , con  $(J - \alpha \mathbf{1})^n = \mathbf{0} \neq (J - \alpha \mathbf{1})^{n-1}$ , ovvero

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si mostri che  $J$  è simile alla sua trasposta e si determini una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^{-1}JP = {}^t J$ .

Sia  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . È vero o falso che  $A$  è simile a  ${}^t A$ ?

<sup>(†)</sup> La disuguaglianza si può facilmente migliorare e scrivere  $\|\phi\|_0 \leq n^{3/2} \|\phi\|_1$ , osservando che, per ogni  $n$ -upla di numeri reali  $(x_1, \dots, x_n)$ , si ha  $-\sqrt{n} \leq x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{n}$  quando  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .

*Svolgimento.* Se  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$  è una base rispetto a cui l'endomorfismo  $\phi$  ha matrice di Jordan  $J$ , allora si ha  $\phi(w_1) = \alpha w_1$ , e  $\phi(w_i) = \alpha w_i + w_{i-1}$  per  $i = 2, \dots, n$ . Considerando la stessa base, nell'ordine inverso, ovvero considerando i vettori  $u_j = w_{n-j}$  per  $j = 1, \dots, n$ , si ha  $\phi(u_j) = \alpha u_j + u_{j+1}$  per  $j = 1, \dots, n-1$  e  $\phi(u_n) = \alpha u_n$  e quindi la matrice di  $\phi$  rispetto alla base  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  è proprio  ${}^t J$ .

Dunque, presa la matrice di cambiamento di base

$$P = \alpha_{\mathcal{U}, \mathcal{W}}(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

si ha  $P^{-1}JP = {}^t J$ .

Presa ora una generica matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , esiste una matrice di Jordan  $M$ , simile ad  $A$ , e si ha  $M = X^{-1}AX$ , per un'opportuna matrice invertibile  $X$ . La matrice  $M$  è fatta di blocchi diagonali di vario ordine, analoghi a  $J$ . Considerando una matrice  $Y$  fatta di blocchi diagonali dello stesso ordine dei blocchi di  $M$  ed analoghi a  $P$ , si ha  ${}^t M = Y^{-1}MY$  e quindi  $M$  è simile alla sua trasposta che, a sua volta, è simile alla trasposta di  $A$ , essendo  ${}^t M = {}^t X {}^t A {}^t X^{-1}$ . Poichè la relazione di simiglianza è transitiva, si conclude che  $A$  e  ${}^t A$  sono simili.  $\square$

**ESERCIZIO 5.** Si consideri l'applicazione esponenziale  $\exp : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$ , definita ponendo  $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  per ogni matrice  $A$ .

- (a) Si mostri che, data comunque una matrice  $B$ , avente due autovalori reali, positivi e distinti, esiste una matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , tale che  $\exp A = B$ .
- (b) Sia  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e si calcoli  $\exp A_1$ .
- (c) Si mostri che, dato comunque un numero reale negativo  $\beta$ , esiste una matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , tale che  $\exp A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ .

*Svolgimento.* (a). Sia dunque  $P$  una matrice invertibile tale che  $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ , ove  $c_1 > 0 < c_2$  sono gli autovalori di  $B$ . Allora, preso  $\lambda_i = \log_e c_i$  per  $i = 1, 2$ , si ha

$$\exp \left[ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \right] = P \left[ \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] P^{-1} = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} P^{-1} = B.$$

(b). Vi è più di un modo per calcolare  $\exp A_1$ ; uno può essere di osservare che la matrice  $A_1^2 = \begin{pmatrix} -\pi^2 & 0 \\ 0 & -\pi^2 \end{pmatrix}$  è scalare e quindi scrivere esplicitamente le entrate delle matrici  $\frac{1}{n!} A_1^n$  e calcolare le somme delle serie che compaiono nel calcolo dell'esponenziale, servendosi ad esempio, delle serie di McLaurin delle funzioni trigonometriche (farlo!).

Un altro modo può essere di osservare che il polinomio caratteristico di  $A_1$  è uguale ad  $X^2 + \pi^2$  e quindi che esiste una matrice (complessa)  $P \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  tale che  $P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix}$ . Dunque

$$\exp A_1 = P \left[ \exp \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix} \right] P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

perchè una matrice scalare commuta con ogni altra matrice.

(c). Sia  $\beta = -c$  con  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  e sia  $\lambda = \log_e c$  e consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -\pi^2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\pi^2 \\ -\pi^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e, poichè i due addendi commutano (uno è una matrice scalare), si ha

$$\exp A = \exp \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & -\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

e quindi  $A$  è la matrice cercata.  $\square$

**ESERCIZIO 6.** Si consideri l'endomorfismo  $\phi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ , avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di  $\phi$ , una matrice di Jordan  $J$  di  $\phi$  ed una matrice  $P \in GL(4, \mathbb{Q})$  tale che  $J = P^{-1}AP$ .

*Svolgimento.* Pol. char.  $(x - 5)^4 =$  pol. minimo; infatti

$$A - 5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E, infine

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 2 & 0 \\ -8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

That's all folks!  $\square$

**ESERCIZIO 7.** Si considerino le rette  $r$  ed  $s$  di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ , di equazioni omogenee

$$r : \begin{cases} x_0 - 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} x_0 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe.

(b) Si consideri l'applicazione  $\pi : \mathbb{P}^3(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ , definita ponendo  $\pi(X) = (X + r) \cap s$ , per ogni elemento  $X$  di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ . Si mostri che  $\pi$  è una applicazione proiettiva e si scriva una sua matrice.

*Svolgimento.* (a). È sufficiente verificare che il sistema lineare omogeneo che determina  $r \cap s$  ha solo la soluzione banale, ovvero che la sua matrice ha rango 4. Infatti, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

(b). Dati, la retta  $r = \sigma \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  ed un generico punto  $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$  di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ , i punti di  $P + r$  hanno coordinate omogenee  $\begin{pmatrix} \alpha p_0 + \gamma \\ \alpha p_1 + \beta \\ \alpha p_2 + \beta - 2\gamma \\ \alpha p_3 - 2\beta + \gamma \end{pmatrix}$ , al variare dei parametri omogenei  $(\alpha, \beta, \gamma)$  e quindi l'intersezione  $(P + r) \cap s$  si determina risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$(P + r) \cap s : \begin{cases} (\alpha p_0 + \gamma) - (\alpha p_2 + \beta - 2\gamma) = 0 \\ (\alpha p_1 + \beta) + (\alpha p_3 - 2\beta + \gamma) = 0 \end{cases} \quad \text{e si ha quindi} \quad \pi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi verificato che  $\pi$  è una applicazione proiettiva e scritta una sua matrice. □

**ESERCIZIO 8.** Sia  $E^n$  lo spazio euclideo  $n$  dimensionale. Dati  $r$  vettori  $v_1, \dots, v_r$ , si consideri la matrice  $X \in M_{n \times r}(\mathbb{R})$  che ha come colonne le coordinate dei vettori  $v_1, \dots, v_r$  rispetto ad un riferimento ortonormale e sia  $G = {}^t X X \in M_r(\mathbb{R})$ .

- (a) Si mostri che il volume ( $r$ -dimensionale non orientato) del parallelepipedo generato da  $v_1, \dots, v_r$  è uguale a  $\sqrt{\det G}$ .
- (b) Si usi il risultato precedente per calcolare la superficie laterale del tetraedro in  $E^3$ , di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Le coordinate sono date rispetto ad un riferimento ortonormale.)

*Svolgimento.* (a). Consideriamo una base ortonormale,  $w_{r+1}, \dots, w_n$ , del sottospazio  $\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp$  e sia  $Y$  la matrice (quadrata di ordine  $n$ ) che ha come colonne le coordinate dei vettori  $v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n$ , rispetto al riferimento ortonormale fissato. Allora, indicato con  $\Gamma$  il parallelepipedo determinato dai vettori  $v_1, \dots, v_r$ , per definizione, si ha  $\text{vol}^r(\Gamma) = |\det Y|$ . D'altra parte, si ha

$${}^t Y Y = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-r} \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che  $(\det Y)^2 = \det G$  e quindi la tesi.

(b). Consideriamo i vettori

$$P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 - P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indicando con  $X_{ijk}$  la matrice  $(3 \times 2)$  avente come colonne le coordinate dei vettori  $P_j - P_i, P_k - P_i$ , e con  $G_{ijk} = {}^t X_{ijk} X_{ijk}$ , la superficie laterale cercata è uguale alla somma delle superficie delle singole facce, ovvero

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt{\det G_{123}} + \sqrt{\det G_{124}} + \sqrt{\det G_{134}} + \sqrt{\det G_{234}} \right) = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{11}}{2},$$

e ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 9.** Si consideri la parabola  $\mathcal{C}$  del piano euclideo, di equazione affine

$$\mathcal{C} : 4x^2 + y^2 - 4xy + 10x - 4 = 0.$$

Si determinino il vertice, l'asse, il fuoco e la direttrice di  $\mathcal{C}$ . Si determinino inoltre l'equazione canonica di  $\mathcal{C}$  e la matrice di un'isometria che porta l'equazione della parabola in forma canonica.

*Svolgimento.* Si tratta della parabola non degenera, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo  $\det A = -25$  e  $\det A' = 0$ . La direzione dell'asse della parabola è il sottospazio degli autovettori relativi all'autovalore nullo di  $A' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , ovvero il punto improprio  $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . L'asse della parabola

è la polare della direzione  $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , ortogonale a  $P_\infty$ , e quindi ha equazione affine  $h : 2x - y + 2 = 0$ . Il vertice di  $\mathcal{C}$  è il punto proprio di intersezione tra l'asse  $h$  e la parabola  $\mathcal{C}$ , ovvero il punto di coordinate omogenee  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Il fuoco è quell'unico punto  $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2\lambda+2 \end{pmatrix}$  dell'asse  $h$ , per cui la polare di  $F_\lambda$ , la polare di  $X_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e la retta  $F_\lambda + X_\infty^\perp$  concorrono ad uno stesso punto (perchè?), e quindi si tratta di determinare il valore di  $\lambda$  per cui si abbia

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5\lambda - 4 & 1 & 2 \\ 2\lambda + 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \lambda = -\frac{1}{10}.$$

Dunque il fuoco di  $\mathcal{C}$  è il punto di coordinate omogenee  $F = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix}$  e la direttrice è la sua polare, ovvero la retta di equazione affine  $d : 2x + 4y - 9 = 0$ .

Restano quindi da determinare l'equazione canonica di  $\mathcal{C}$  e la matrice dell'isometria che porta  $\mathcal{C}$  nella sua forma canonica, ovvero la trasformazione che porta l'origine nel vertice di  $\mathcal{C}$ , l'asse delle ascisse nella retta tangente a  $\mathcal{C}$  nel vertice e l'asse delle ordinate sull'asse della conica. Poichè l'autovalore non nullo di  $A'$  è uguale a 5, l'equazione canonica della parabola  $\mathcal{C}$  è  $2Y = \sqrt{5}X^2$ .

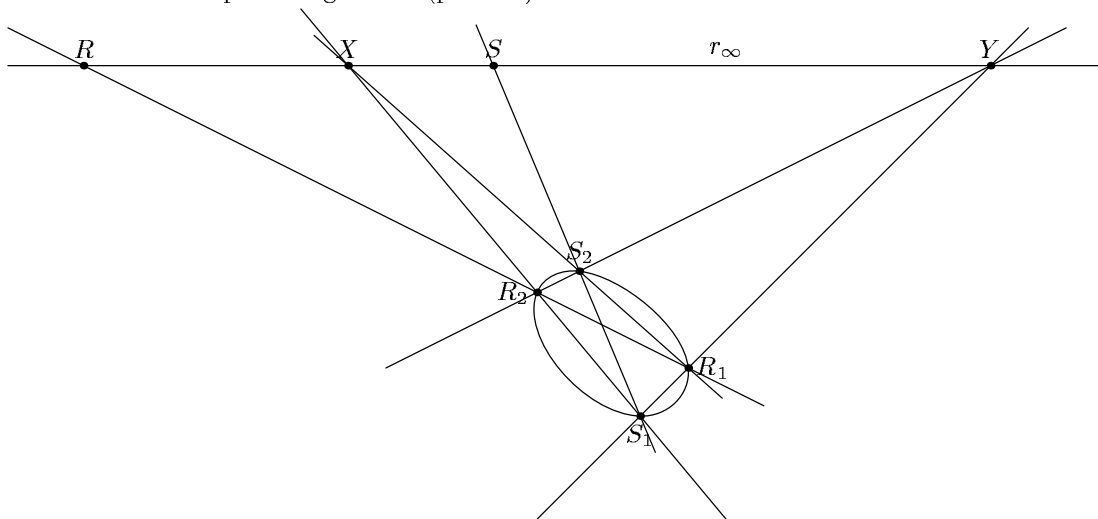
Infine, la matrice della trasformazione di coordinate è

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \text{e si ha} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} {}^t X A X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 10.** Sia  $\mathcal{C}$  una conica a centro nel piano affine  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ . Date due rette per il centro,  $r$  ed  $s$ , siano  $\{R_1, R_2\} = r \cap \mathcal{C}$  ed  $\{S_1, S_2\} = s \cap \mathcal{C}$  e supponiamo che i quattro punti abbiano tutti coordinate reali. Si mostri che il quadrilatero  $R_1 S_1 R_2 S_2$  è un parallelogramma e si verifichi che le direzioni dei lati separano armonicamente le direzioni delle diagonali.

*Svolgimento.* Usando un argomento di tipo metrico, possiamo osservare che il centro  $C$  di una conica è anche centro di simmetria per la stessa e quindi le due diagonali  $R_1 R_2$  ed  $S_1 S_2$  si incontrano nel punto medio e questo accade solo in un parallelogramma (perchè?).



D'altra parte, possiamo considerare il quadrangolo piano completo determinato dai quattro punti, come rappresentato nel disegno qui sopra ed osservare che la retta contenente le intersezioni dei lati opposti del

quadrangolo deve passare per i punti  $R$  ed  $S$  tali che  $(S_1, S_2, C, S) = -1 = (R_1, R_2, C, R)$ . Dato che i punti  $R_1, R_2, S_1, S_2$  sono contenuti nel supporto di  $\mathcal{C}$  e  $C$  è il centro, possiamo concludere che la retta  $R + S$  è la polare del centro, ovvero la retta impropria  $r_\infty$ . Dunque i lati opposti del quadrilatero  $R_1S_1R_2S_2$  si incontrano in due punti della retta impropria; inoltre, per le proprietà del quadrangolo piano completo, le intersezioni delle diagonali con questa retta separano armonicamente i due punti.  $\square$





---

## Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 4 luglio 2000

---

**ESERCIZIO 1.** Siano date due matrici  $A, B \in M_4(\mathbb{R})$  e si consideri l'insieme  $L = \{ X \in M_4(\mathbb{R}) \mid AX = B \}$ . Si mostri che  $L$  è una sottovarietà lineare dello spazio affine  $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$  e se ne calcoli la dimensione in funzione del rango della matrice  $A$ .

Si scrivano esplicitamente gli elementi di  $L$  nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Svolgimento.* Nello spazio affine  $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ , possiamo considerare le 16 entrate di una matrice  $X$  come un sistema di coordinate affini, avente come origine la matrice nulla  $\mathbf{0}$  e come base associata la base canonica di  $M_4(\mathbb{R})$ . La condizione  $AX = B$  produce un sistema di 16 equazioni lineari nelle coordinate dette e quindi  $L$  è una sottovarietà lineare di  $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ .

L'equazione matriciale  $AX = B$  ha soluzione se, e solo se,  $\text{im} B \subseteq \text{im} A$ ; quindi, se tale condizione non è soddisfatta  $L = \emptyset$  ed ha dimensione  $-1$ . Se invece  $\text{im} B \subseteq \text{im} A$ , ciò significa che le colonne della matrice  $B$  si scrivono come combinazioni lineari delle colonne della matrice  $A$  ed i coefficienti di tali combinazioni determinano appunto una soluzione particolare  $X_0$  dell'equazione  $AX = B$ . Ogni altra soluzione si ottiene sommando ad  $X_0$  una soluzione di  $AX = \mathbf{0}$ , ovvero una matrice  $X$  tale che  $\text{im} X \subseteq \ker A$ ; Le matrici di questo tipo formano un sottospazio di  $M_4(\mathbb{R})$ , di dimensione  $4 \dim \ker A$ , e dunque si conclude che, se  $L \neq \emptyset$ , allora  $\dim L = 16 - 4\text{rk} A$ .

Nel caso delle due matrici  $A$  e  $B$  scritte sopra,  $A$  ha rango 3 ed una soluzione particolare è data dalla matrice

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservando che  $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ , si conclude che il sottospazio direttore di  $L$  è costituito dalle matrici

del tipo  $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ -a & -b & -c & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  al variare di  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ . Possiamo quindi scrivere la rappresentazione parametrica della varietà  $L$ , ovvero

$$L = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1+a & b & 1+c & d \\ 1+2a & 2b & 2c & 1+2d \\ -a & 2-b & -c & -d \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right) \right\}$$

e ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 2.** Si consideri la matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , ove  $a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j \\ \beta & \text{altrimenti} \end{cases}$ , con  $\alpha \neq \beta$ , e si calcoli  $\det A$ .

*Svolgimento.* Si tratta di calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

in funzione di  $\alpha$  e  $\beta$ . Siano quindi  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $C^n$  e  $D$  un'applicazione  $n$ -lineare, alternante, non-nulla su tale spazio. Posto  $w = v_1 + \dots + v_n$ , si ha

$$\det A = \frac{D(\beta w + (\alpha - \beta)v_1, \beta w + (\alpha - \beta)v_2, \dots, \beta w + (\alpha - \beta)v_n)}{D(v_1, v_2, \dots, v_n)}.$$

Poiché  $D$  è multilineare ed alternante, si ha

$$\begin{aligned} & D(\beta w + (\alpha - \beta)v_1, \beta w + (\alpha - \beta)v_2, \dots, \beta w + (\alpha - \beta)v_n) = \\ & = (\alpha - \beta)^n D(v_1, v_2, \dots, v_n) + \beta(\alpha - \beta)^{n-1} [D(w, v_2, \dots, v_n) + D(v_1, w, \dots, v_n) + \dots + D(v_1, \dots, v_{n-1}, w)]. \end{aligned}$$

Inoltre, sempre perché  $D$  è multilineare ed alternante, ciascuno degli addendi all'interno della parentesi quadra coincide con  $D(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , e si conclude che  $\det A = (\alpha - \beta)^n + n\beta(\alpha - \beta)^{n-1} = (\alpha - \beta)^{n-1}(\alpha + (n-1)\beta)$ .  $\square$

**ESERCIZIO 3.** Si considerino su  $\mathbb{R}^4$  le due forme quadratiche

$$q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2, \quad e \quad q_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_4.$$

- (a) Si dica per quali valori di  $\lambda \in [0, 1]$  la forma quadratica  $q_\lambda = \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_0$  è degenere.  
 (b) Si dica per quali valori di  $\lambda \in [0, 1]$  il sottospazio  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  contiene vettori isotropi rispetto a  $q_\lambda$ .  
 (c) Si dica per quali valori di  $\lambda \in [0, 1]$  la restrizione di  $q_\lambda$  al sottospazio  $\langle e_1 + 3e_4, 2e_1 - e_4 \rangle$  è definita positiva.

*Svolgimento.* (a). L'applicazione bilineare simmetrica associata a  $q_\lambda$  ha matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 2 - 4\lambda & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - 2\lambda & 0 \\ 1 - \lambda & 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

ed è degenere se, e solo se,  $\det A_\lambda = 0$ . Essendo  $\det A_\lambda = [2\lambda^2 - (1 - \lambda)^2][2(1 - 2\lambda)^2 - (1 - \lambda)^2]$ , si conclude che la forma quadratica  $q_\lambda$  è degenere se, e solo se,  $\lambda \in \left\{ \frac{1}{1 - \sqrt{2}}, \frac{1}{1 + \sqrt{2}}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}, \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 1} \right\}$  e di questi valori solo  $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$  non appartiene all'intervallo  $[0, 1]$ .

(b). Il sottospazio  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  contiene vettori isotropi rispetto a  $q_\lambda$  se la restrizione della forma quadratica a questo spazio non è definita. Possiamo quindi considerare i segni dei minori principali della matrice della restrizione di  $q_\lambda$ , che sono:  $\lambda$ ,  $2\lambda(1 - 2\lambda)$  e  $\lambda[2(1 - 2\lambda)^2 - (1 - \lambda)^2]$ . In tal modo si vede che la restrizione di  $q_\lambda$  è definita positiva solo per  $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 1}$ , e quindi vi sono vettori isotropi nel sottospazio  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  per  $\lambda \in \left[ \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 1}, 1 \right]$ .

(c). La restrizione di  $q_\lambda$  al sottospazio  $\langle e_1 + 3e_4, 2e_1 - e_4 \rangle = \langle e_1, e_4 \rangle$  ha matrice  $B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$  (rispetto alla base  $\{e_1, e_4\}$ ), ed è definita positiva se, e solo se,  $\begin{cases} \lambda > 0 \\ 2\lambda^2 - (1 - \lambda)^2 > 0 \end{cases}$ . Dunque la restrizione è definita positiva per  $\lambda \in \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}}, 1 \right]$ .  $\square$

**ESERCIZIO 4.** Si consideri l'applicazione esponenziale  $\exp : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ , definita ponendo  $\exp A =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \text{ per ogni matrice } A.$$

Si mostri che, dato comunque un numero reale positivo  $b$ , esiste una matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , tale che  $\exp A = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .

*Svolgimento.* Si osservi che, per ogni numero reale  $a$ , si ha

$$\exp \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \exp \left[ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \exp \left[ \begin{pmatrix} e^{-a/2} & 0 \\ 0 & e^{a/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{a/2} & 0 \\ 0 & e^{-a/2} \end{pmatrix} \right] &= \\ &= \begin{pmatrix} e^{-a/2} & 0 \\ 0 & e^{a/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{a/2} & 0 \\ 0 & e^{-a/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 1 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da quanto visto si ottiene

$$\exp \begin{pmatrix} \log_e b & 1/b \\ 0 & \log_e b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

che è quanto dovevamo mostrare. □

**ESERCIZIO 5.** Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione 2, dotato di una forma hermitiana  $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita positiva, e sia  $E$  lo spazio vettoriale reale formato dagli endomorfismi  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  autoaggiunti relativamente ad  $h$  (ovvero  $h(\phi(v), w) = h(v, \phi(w))$ , per ogni coppia di vettori  $v, w$  in  $\mathcal{H}$ ) ed aventi traccia  $\text{tr} \phi = 0$ .

- (a) Fissata una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ , si rappresentino gli elementi di  $E$  come matrici e si calcoli  $\dim_{\mathbb{R}} E$  e si verifichi che l'applicazione  $\phi \mapsto \det \phi$  è una forma quadratica, definita negativa su  $E$ .
- (b) Si mostri che ogni elemento  $\phi$  di  $E$  è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono due numeri reali opposti tra loro. Se ne deduca che, in corrispondenza a  $\phi \neq 0$ , resta determinata una decomposizione  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$  ove i due sottospazi sono ortogonali tra loro ed  $\mathcal{H}_+$  (resp.  $\mathcal{H}_-$ ) è costituito dagli autovettori relativi all'autovalore positivo (resp. negativo).
- (c) Si mostri che ogni decomposizione  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$  con i due sottospazi ortogonali tra loro, determina un elemento  $\phi$  di  $E$ , a meno di moltiplicazione per un numero reale positivo (cioè determina una semiretta di  $E$ ).

*Svolgimento.* (a). Sia  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$  una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ . Se  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  è un endomorfismo autoaggiunto, la matrice  $A = \alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}(\phi)$  deve soddisfare alla condizione  $\overline{A} = A$  e quindi deve essere una matrice hermitiana. Si conclude che gli elementi di  $E$  corrispondono alle matrici hermitiane di ordine 2 con traccia nulla; ovvero si ha

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}$$

e si tratta quindi di uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, una cui base è costituita dalle matrici  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ . Si osservi inoltre, che data  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix} \in E$ , si ha  $\det A = -a^2 - |b|^2$  che è quindi una forma quadratica (definita negativa) su tale spazio<sup>(†)</sup>.

(b). È ben noto (cf. il *Teorema Spettrale*) che ogni operatore autoaggiunto  $\phi$  è diagonalizzabile, che i suoi autovalori sono numeri reali e che esiste una base di  $\mathcal{H}$ , ortonormale rispetto ad  $h$ , costituita da autovettori per  $\phi$ . Poichè matrici simili hanno la stessa traccia, i due autovalori di  $\phi \neq 0$  sono due numeri reali opposti tra loro e si ha quindi la decomposizione  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$  ove i due sottospazi di autovettori sono ortogonali tra loro.

(c). Viceversa, data una decomposizione dello spazio  $\mathcal{H}$  come somma di due sottospazi ortogonali di dimensione 1, si fissi una base ortonormale  $w_1, w_2$  di  $\mathcal{H}$  tale che  $\mathcal{H}_+ = \langle w_1 \rangle$  e  $\mathcal{H}_- = \langle w_2 \rangle$  e si consideri

---

<sup>(†)</sup> Si osservi che l'applicazione bilineare simmetrica associata a questa forma quadratica è  $(A, B) \mapsto -\text{tr}(AB)$ . Lasciamo al lettore il compito di scrivere esplicitamente le relazioni tra lo spazio  $E$  e lo spazio dei quaternioni puri  $\langle I, J, K \rangle$ , come sottospazi di  $M_2(\mathbb{C})$ .

l'endomorfismo  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , definito da  $\phi(w_1) = w_1$  e  $\phi(w_2) = -w_2$ . La scelta di una tale base non è univoca, perché ciascuno dei due vettori può venir moltiplicato per un numero complesso di modulo 1, ma la definizione di  $\phi$  non dipende da tale scelta. È chiaro inoltre che ogni endomorfismo del tipo  $c\phi$ , con  $c$  numero reale positivo, dà luogo alla stessa decomposizione di  $\mathcal{H}$ . Abbiamo quindi descritto una corrispondenza tra le semirette dello spazio (euclideo)  $E$  e le decomposizioni ortogonali dello spazio (unitario)  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**ESERCIZIO 6.** Si consideri l'endomorfismo  $\phi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ , avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di  $\phi$ , una matrice di Jordan  $J$  di  $\phi$  ed una matrice  $P \in \text{GL}(4, \mathbb{Q})$  tale che  $J = P^{-1}AP$ .

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico è  $\det(X\mathbf{1} - A) = (X - 4)^4$ . Inoltre, si ha

$$A - 4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad (A - 4)^3 = \mathbf{0}$$

da cui si vede che il polinomio minimo è  $(X - 4)^3$  e  $\text{rk}(A - 4) = 2$ . I vettori  $v_1 = e_1 + e_3 + e_4$ ,  $v_2 = (\phi - 4)^2(e_1) = 3e_2 + 3e_4$ ,  $v_3 = (\phi - 4)(e_1) = 2e_1 - 1e_2 + 2e_3 - 2e_4$  e  $v_4 = e_1$  formano una base rispetto a cui  $\phi$  ha matrice di Jordan  $J$ . Dunque le matrici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste.  $\square$

**ESERCIZIO 7.** Nello spazio euclideo tridimensionale, immerso nel modo usuale in  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , si consideri il quadrilatero  $P_1P_2P_3P_4$ , contenuto nel piano  $\pi : z = 0$ , avente come vertici i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

e come lati le rette

$$\ell_1 = \begin{cases} 4y - x + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_2 = \begin{cases} 2y + x - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_3 = \begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_4 = \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Sia dato inoltre il piano  $\sigma : x - y + 2z = 2$ .

- Si dica se esistono dei punti  $P$  dello spazio euclideo tali che, proiettando  $\pi$  su  $\sigma$  dal centro  $P$ , il quadrilatero dato abbia come immagine un parallelogramma. In caso affermativo si determinino tutti i punti  $P$  soddisfacenti a questa condizione.
- Siano  $P_5 = \ell_1 \cap \ell_3$ ,  $P_6 = \ell_2 \cap \ell_4$  ed  $r = P_5 + P_6$ . Detti  $D_1 = (P_1 + P_3) \cap r$  e  $D_2 = (P_2 + P_4) \cap r$ , si determinino (se esistono) due punti  $C$  e  $\bar{C}$  della retta  $r$ , per cui si abbia  $(C, \bar{C}, P_5, P_6) = -1 = (C, \bar{C}, D_1, D_2)$ .
- Si dica infine se esiste un punto  $P$  dello spazio euclideo tale che, proiettando  $\pi$  su  $\sigma$  dal centro  $P$ , il quadrilatero dato abbia come immagine un quadrato.

*Svolgimento.* (a). Consideriamo i punti di intersezione tra i lati opposti del quadrilatero, ovvero

$$P_5 = \ell_1 \cap \ell_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \ell_2 \cap \ell_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e sia } r = P_5 + P_6 : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Allora la proiezione di centro  $P$  del quadrilatero  $P_1P_2P_3P_4$  su  $\sigma$  è un parallelogramma se, e solo se, la retta  $r$  si proietta sulla retta impropria di  $\sigma$ , ovvero se, e solo se,  $P + r$  è un piano parallelo a  $\sigma$ . Quindi, per soddisfare alle condizioni poste, il punto  $P$  deve appartenere al piano  $\sigma' : x - y + 2z = 0$ , ma non alla retta  $r$ .

(b). Si ha

$$P_1 + P_3 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad P_2 + P_4 : \begin{cases} 2y - 2x + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e quindi  $D_1$  è l'origine dello spazio euclideo mentre  $D_2$  è il punto improprio della retta  $r$ , ovvero il punto di coordinate omogenee  $D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Per determinare i punti  $C$  e  $\bar{C}$  di  $r$ , possiamo considerare coordinate affini sulla retta  $r$  e prendere quindi il sistema di riferimento che ha

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ punto improprio,} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ origine,} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ punto unità.}$$

Allora, le coordinate affini  $z$  e  $\bar{z}$  di  $C$  e  $\bar{C}$  in tale riferimento devono soddisfare alle condizioni

$$\begin{cases} -1 = (C, \bar{C}, P_5, P_6) = (z, \bar{z}, -1, 1) = \frac{(1-\bar{z})(-1-z)}{(1-z)(-1-\bar{z})} \\ -1 = (C, \bar{C}, D_1, D_2) = (z, \bar{z}, 0, \infty) = \frac{(\infty-\bar{z})(0-z)}{(\infty-z)(0-\bar{z})} \end{cases}$$

da cui si ottiene la soluzione  $z = i$ ,  $\bar{z} = -i$  e quindi i punti

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c). La proiezione di centro  $P$  del quadrilatero  $P_1P_2P_3P_4$  su  $\sigma$  è un quadrato se, e solo se, l'immagine è un parallelogramma con i lati perpendicolari tra loro (rettangolo) e le diagonali perpendicolari tra loro (rombo). Ciò accade se, e solo se, i punti  $C$  e  $\bar{C}$  si proiettano sui punti ciclici  $I$  ed  $\bar{I}$  del piano  $\sigma$ . Indicato con  $\mathcal{H}$  l'assoluto dello spazio euclideo, si ha

$$\{I, \bar{I}\} = \sigma \cap \mathcal{H} : \begin{cases} -2x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases},$$

e quindi  $I = \begin{pmatrix} 0 \\ -2+i\sqrt{6} \\ 2+i\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$  ed  $\bar{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2-i\sqrt{6} \\ 2-i\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$ . Dunque, vi sono due punti  $X$  ed  $Y$ , da cui il quadrilatero si proietta in un quadrato e sono precisamente  $X = (C + I) \cap (\bar{C} + \bar{I})$  ed  $Y = (C + \bar{I}) \cap (\bar{C} + I)$ ; dunque

$$X : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2ix_0 + x_1 + x_2 + i\sqrt{6}x_3 = 0 \\ -2ix_0 + x_1 + x_2 - i\sqrt{6}x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad Y : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2ix_0 + x_1 + x_2 - i\sqrt{6}x_3 = 0 \\ -2ix_0 + x_1 + x_2 + i\sqrt{6}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero } X = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ed } Y = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

**ESERCIZIO 8.** Sia  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & R \end{pmatrix}$  la matrice (rispetto ad un riferimento ortonormale) di un'isometria dello spazio euclideo tridimensionale, con  $\det X = 1$ .

Si mostri che, se  $X$  non è la matrice di una traslazione,  $R$  ha esattamente un sottospazio  $\langle v \rangle$ , di dimensione 1, di autovettori relativi all'autovalore 1 e si verifichi  $X$  è la matrice di una rotazione se, e solo se,  $t \in \langle v \rangle^\perp$ .

Si concluda che, in generale, l'isometria di matrice  $X$ , si decompone in una rotazione seguita da una traslazione parallela all'asse di rotazione.

*Svolgimento.* La matrice  $R$  ha ordine 3 e quindi il suo polinomio caratteristico ha (almeno) una radice reale. Poichè gli autovalori  $\lambda$  di  $R \in SO_3$  devono avere  $|\lambda| = 1$ , ed il loro prodotto deve essere uguale a  $\det R = 1$ , si conclude che o  $R = \mathbf{1}$  e quindi  $X$  è una traslazione, oppure  $R$  ha esattamente un sottospazio di dimensione 1 di autovettori relativi all'autovalore 1.

Sia quindi  $R \neq \mathbf{1}$ , ed osserviamo che  $X$  è la matrice di una rotazione se, e solo se, esiste una retta di punti uniti; e questo accade se, e solo se, il sistema lineare  $(R - \mathbf{1})x = -t$  ha soluzione. Infatti, per quanto abbiamo visto la matrice incompleta ha rango 2 e quindi il sistema definisce una retta se, e solo se,  $t \in \text{im}(R - \mathbf{1})$ . Indicato con  $\langle v \rangle$  il sottospazio di autovettori di  $R \in SO_3$  relativi all'autovalore 1, è immediato verificare che  $\text{im}(R - \mathbf{1}) = \langle v \rangle^\perp$ . In particolare, se  $t = (R - \mathbf{1})t'$ , allora l'asse della rotazione di matrice  $X$  è la retta  $\begin{pmatrix} 1 \\ -t' \end{pmatrix} + \langle v \rangle$ .

Dato un vettore  $t \in \mathbb{R}^3$ , si ha  $t = \alpha v + w$ , ove  $\langle v \rangle$  è il sottospazio di autovettori di  $R$  relativi all'autovalore 1 e  $w \in \langle v \rangle^\perp$ ; quindi si ha  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha v & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & R \end{pmatrix}$ , che è la decomposizione cercata per  $X^{(\dagger)}$ .  $\square$

**ESERCIZIO 9.** Si consideri l'iperbole  $\mathcal{C}$  del piano euclideo, di equazione affine

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 10xy + 4x - 4y + \frac{5}{3} = 0.$$

- (a) Si determinino il centro, gli assi e l'equazione canonica di  $\mathcal{C}$ .  
 (b) Si determini inoltre la matrice di un'affinità che trasforma  $\mathcal{C}$  in un'iperbole equilatera con centro nell'origine.

*Svolgimento.* Si tratta dell'iperbole non degenera, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo  $\det A = -8$  e  $\det A' = -24$ . La matrice  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$  ha gli autovalori 6 e  $-4$ , i cui spazi di autovettori corrispondono ai punti impropri  $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , le cui polari sono gli assi di  $\mathcal{C}$ .

In particolare, poichè  $-\frac{\det A'}{\det A} = -3 < 0$ , la direzione dell'asse focale è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore negativo, ovvero  $Q_\infty$ . Quindi gli assi di  $\mathcal{C}$  sono

$$h_1 : 3x - 3y + 2 = 0 \text{ (asse focale),} \quad \text{e} \quad h_2 : x + y = 0.$$

Il centro è l'intersezione degli assi, ovvero il punto di coordinate omogenee  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . In base a quanto visto, l'equazione canonica dell'iperbole  $\mathcal{C}$  è quindi  $\frac{X^2}{1/12} - \frac{Y^2}{1/18} = 1$ . Infine, un'affinità che trasformi  $\mathcal{C}$  in

---

( $\dagger$ ) Da questa decomposizione deriva il nome di *rototraslazioni* che viene usualmente dato alle isometrie che rispettano l'orientamento dello spazio euclideo tridimensionale.

un'iperbole equilatera con centro nell'origine, si può trovare portando l'origine degli assi nel centro di  $\mathcal{C}$ , portando gli assi coordinati sugli assi di  $\mathcal{C}$  ed infine, modificando le unit'a di misura sugli assi in modo da far coincidere il valore assoluto dei due semiassi dell'ellisse. Si può quindi considerare l'affinità di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \text{e si ha} \quad -\frac{1}{3} {}^t X A X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix},$$

che è la matrice di un'iperbole equilatera con centro nell'origine. □

**ESERCIZIO 10.** Si consideri il sottoinsieme  $\mathcal{S}$  di  $\mathbb{P}(M_2(\mathbb{C}))$  formato dai punti corrispondenti a matrici non diagonalizzabili.

- (a) Si mostri che  $\mathcal{S}$  è costituito da tutti e soli i punti di un cono quadrico  $\mathcal{C}$ , privato del vertice  $V$  e si scrivano l'equazione di  $\mathcal{C}$  e le coordinate del vertice  $V$  nel sistema di riferimento associato alla base canonica di  $M_2(\mathbb{C})$ .
- (b) Si consideri l'analogo sottoinsieme  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  di  $\mathbb{P}(M_2(\mathbb{R}))$  formato dai punti corrispondenti a matrici non diagonalizzabili e si mostri che  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  è costituito da tutti e soli i punti che sono all'interno e sulla superficie di un cono quadrico  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , escluso il vertice  $V$ .

*Svolgimento.* (a). Nel riferimento associato alla base canonica di  $M_2(\mathbb{C})$  le entrate della matrice  $A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  sono le coordinate omogenee del punto  $\sigma(A)$  di  $\mathbb{P}(M_2(\mathbb{C}))$ . La matrice  $A$  non è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$  se, e solo se, il suo polinomio caratteristico ha una radice doppia ed  $A$  non è una matrice scalare. Il polinomio caratteristico di  $A$  è  $p_A(X) = X^2 - (x_0 + x_3)X + (x_0x_3 - x_1x_2)$ , ed ha un'unica radice con molteplicità 2 se, e solo se,  $(x_0 - x_3)^2 + 4x_1x_2 = 0$ . Quest'ultima è l'equazione di una superficie quadrica degenera. Infatti,

ha grado 2 e la matrice associata è  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , con determinante nullo, ed il nucleo di  $C$  è il vertice

del cono, ovvero il punto  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Il punto  $V$  corrisponde esattamente alle matrici scalari e quindi  $\mathcal{S}$  è formato da tutti e soli i punti del cono quadrico di matrice  $C$ , escluso il vertice  $V$ .

(b). Possiamo fare un calcolo analogo in  $\mathbb{P}(M_2(\mathbb{R}))$ , ricordando che una matrice reale  $A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  non è diagonalizzabile sia quando il suo polinomio caratteristico ha una radice doppia ed  $A$  non è una matrice scalare che quando il suo polinomio caratteristico ha due radici complesse coniugate. Ciò significa precisamente che

deve aversi  $(x_0 - x_3)^2 + 4x_1x_2 \leq 0$ , con l'esclusione del punto  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , corrispondente alle matrici scalari, e

quindi tutti e soli i punti che sono all'interno e sulla superficie del cono quadrico  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} : (x_0 - x_3)^2 + 4x_1x_2 = 0$ , escluso il vertice  $V$ . □





---

**Esame di Geometria (laurea in Fisica)**  
prova scritta del 31 agosto 2000

---

**ESERCIZIO 1.** Siano  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Si mostri che l'insieme  $L = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid XA = B\}$  è una sottovarietà lineare dello spazio affine  $\mathbb{A}(M_n(\mathbb{R}))$  e se ne calcoli la dimensione, al variare di  $A$  e  $B$ .

Si scrivano esplicitamente gli elementi di  $L$  nel caso in cui  $n = 4$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Svolgimento.* Nello spazio affine  $\mathbb{A}(M_n(\mathbb{R}))$ , possiamo considerare le  $n^2$  entrate di una matrice  $X$  come un sistema di coordinate affini, avente come origine la matrice nulla  $\mathbf{0}$  e come base associata la base canonica di  $M_n(\mathbb{R})$ . La condizione  $XA = B$  produce un sistema di  $n^2$  equazioni lineari nelle coordinate dette e quindi  $L$  è una sottovarietà lineare di  $\mathbb{A}(M_n(\mathbb{R}))$ .

L'equazione matriciale  $XA = B$  ha soluzione se, e solo se,  $\ker A \subseteq \ker B$ ; quindi, se tale condizione non è soddisfatta  $L = \emptyset$  ed ha dimensione  $-1$ . Sia  $\ker A \subseteq \ker B$ , l'endomorfismo corrispondente ad  $X$ , è univocamente determinato sul sottospazio  $\text{im } A$ , mentre può essere fissato ad arbitrio su un complementare di tale sottospazio; quindi, le matrici di questo tipo formano un sottospazio di  $M_n(\mathbb{R})$ , di dimensione  $n(n - \dim \text{im } A)$ , e si conclude che, se  $L \neq \emptyset$ , allora  $\dim L = n^2 - n \text{rk } A$ .

Nel caso delle due matrici  $A$  e  $B$  scritte sopra,  $A$  ha rango 3 ed il suo nucleo è  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ , che è contenuto nel nucleo di  $B$ . La matrice  $X$  deve quindi soddisfare alle condizioni

$$X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ed una soluzione particolare è

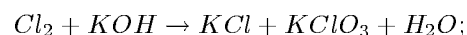
$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ortogonale di  $\text{im } A$  è il sottospazio  $\langle (1, -2, 0, 1) \rangle$ , da cui si deduce che il sottospazio direttore di  $L$  è costituito dalle matrici del tipo  $\begin{pmatrix} a & -2a & 0 & a \\ b & -2b & 0 & b \\ c & -2c & 0 & c \\ d & -2d & 0 & d \end{pmatrix}$  al variare di  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ . Possiamo quindi scrivere la rappresentazione parametrica della varietà  $L$ , ovvero

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2a - 5 & 2 & a + 3 \\ b & -2b - 4 & 3 & b + 1 \\ c & -2c + 1 & 0 & c - 1 \\ d & -2d & 0 & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

e ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 2.** Unendo il cloro ( $Cl_2$ ) all'idrossido di potassio ( $KOH$ ), si ottengono cloruro di potassio ( $KCl$ ), clorato di potassio ( $KClO_3$ ) e acqua ( $H_2O$ ). Bilanciare la reazione



ovvero trovare dei numeri naturali  $n_1, \dots, n_5$  tali che il numero di atomi di ciascun elemento nel termine di sinistra  $n_1Cl_2 + n_2KOH$  sia uguale al numero di atomi di ciascun elemento presente nel termine di destra  $n_3KCl + n_4KClO_3 + n_5H_2O$ .

*Svolgimento.* In base alle condizioni date, i numeri cercati devono essere soluzione del sistema lineare (omogeneo)

$$\begin{cases} 2n_1 = n_3 + n_4 \\ n_2 = n_3 + n_4 \\ n_2 = 3n_4 + n_5 \\ n_2 = 2n_5 \end{cases}$$

che ha rango 4 e le cui soluzioni in  $\mathbb{Q}^5$  formano il sottospazio  $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Le soluzioni del problema sono

quindi tutti i vettori del sottospazio delle soluzioni aventi coordinate in  $\mathbb{N}$  e questi sono tutti e soli i multipli naturali del vettore indicato, dato che il massimo comun divisore delle sue coordinate è uguale ad 1.  $\square$

**ESERCIZIO 3.** Sia  $n \geq 3$  e si consideri la matrice  $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , di ordine  $n$ , ove

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } |j - i| = 1 \\ \beta & \text{se } j - i = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Posto  $\delta_n = \det A_n$ , si scriva la relazione ricorsiva che governa la successione  $(\delta_n)_{n \geq 3}$  e si calcolino i valori iniziali necessari per determinare la successione.

Si dica se, per  $\alpha = 2$  e  $\beta = 4$ , la successione  $(\delta_n)_{n \geq 3}$  converge in  $\mathbb{C}$ .

*Svolgimento.* Si tratta di calcolare il determinante di una matrice di ordine  $n$ , del tipo

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta & \ddots & & \vdots \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 0 & \alpha & \beta \\ \vdots & & & \ddots & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando opportunamente (come?) la regola di Laplace alla generica matrice  $A_n$ , si ottiene la relazione ricorsiva

$$\delta_n = -\alpha^2 \delta_{n-2} + \alpha^2 \beta \delta_{n-3}$$

e quindi, per  $n$  sufficientemente elevato, il valore di  $\delta_n$  è determinato dai tre valori precedenti e possiamo scrivere la relazione ricorsiva in forma matriciale, ovvero

$$\begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \delta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2 & \alpha^2 \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{n-1} \\ \delta_{n-2} \\ \delta_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Dunque la successione  $(\delta_n)_{n \geq 3}$  è determinata da questa regola e dal ‘vettore iniziale’  $\begin{pmatrix} \delta_5 \\ \delta_4 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$ , le cui componenti sono

$$\delta_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha^2 \beta, \quad \delta_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha^4, \quad \delta_5 = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = -2\alpha^4 \beta.$$

Nel caso in cui  $\alpha = 2$  e  $\beta = 4$ , la relazione ricorsiva che governa la successione  $(\delta_n)_{n \geq 3}$  è determinata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è  $x^3 + 4x - 16$ . Gli autovalori di  $B$  sono dunque  $2, 1 + i\sqrt{7}, 1 - i\sqrt{7}$ , ed hanno tutti modulo strettamente maggiore di 1. Da ciò si conclude che, qualunque sia il ‘vettore iniziale’, applicando ad esso ripetutamente la matrice  $B$ , il modulo dei vettori così ottenuti cresce indefinitamente e quindi la successione data non può convergere.  $\square$

**ESERCIZIO 4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale e  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$  una sua base. Dato  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si consideri l'applicazione bilineare simmetrica  $g_\lambda : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , di matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 - 8\lambda & 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

Al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si determini l'indice di inerzia della applicazione  $g_\lambda$  quando questa è non-degenera, ed il nucleo di  $g_\lambda$  quando degenera.

*Svolgimento.* Lo spazio  $V$  si decompone come somma ortogonale dei due sottospazi  $W_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$  e  $W_2 = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$  e quindi l'indice di inerzia di  $g_\lambda$  è uguale alla somma degli indici di inerzia delle restrizioni di  $g_\lambda$  ai due sottospazi. Consideriamo dapprima la restrizione a  $W_2$  che è indipendente da  $\lambda$ . Il vettore  $v_4$  è isotropo e forma, assieme al vettore  $v_5 - 2v_4$  un piano iperbolico; ed osservando che  $\langle v_4, v_5 \rangle^\perp \cap W_2 = \langle v_3 + 5v_4 - 2v_5 \rangle$ , si ottiene che la restrizione di  $g_\lambda$  a  $W_2$  ha matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rispetto alla base } \{v_3 + 5v_4 - 2v_5, v_4, v_5 - 2v_4\},$$

e quindi il suo indice di inerzia è uguale ad 1, qualunque sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Consideriamo ora la restrizione di  $g_\lambda$  a  $W_1$  ed osserviamo che il determinante della matrice della restrizione di  $g_\lambda$ , rispetto alla base  $\{v_1, v_2\}$  è uguale ad  $1 - 8\lambda - 9\lambda^2$ , e quindi l'applicazione degenera per  $\lambda \in \{-1, \frac{1}{9}\}$ ; in tali casi, il nucleo è dato dai sottospazi  $\langle v_1 + 3v_2 \rangle$  e  $\langle 3v_1 - v_2 \rangle$ , rispettivamente. I minori principali della matrice della restrizione di  $g_\lambda$  sono  $1 - 8\lambda$  ed  $1 - 8\lambda - 9\lambda^2$ , e dai segni di questi minori, si deduce che la restrizione di  $g_\lambda$  a  $W_1$  è definita positiva (indice di inerzia 2) per  $\lambda \in (-1, \frac{1}{9})$  e non definita (indice di inerzia 0) quando  $\lambda$  è all'esterno di tale intervallo.

Concludendo, si ha

$$i(g_\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda < -1 \\ 3 & \text{se } -1 < \lambda < \frac{1}{9} \\ 1 & \text{se } \lambda > \frac{1}{9} \end{cases}$$

e  $g_\lambda$  è degenera per i restanti valori di  $\lambda$ .  $\square$

**ESERCIZIO 5.** Sia  $A \in M_n(C)$  e si consideri l'applicazione lineare  $\Lambda_A : M_n(C) \rightarrow M_n(C)$ , definita ponendo  $\Lambda_A(X) = AX$ .

- (a) Si mostri che  $A$  e  $\Lambda_A$  hanno gli stessi autovalori e si determinino le dimensioni dei sottospazi corrispondenti.
- (b) Si mostri che  $A$  e  $\Lambda_A$  hanno lo stesso polinomio minimo e si deduca che  $\Lambda_A$  è diagonalizzabile se, e solo se, lo è  $A$ .

*Svolgimento.* (a). Se  $\lambda$  è un autovalore della matrice  $A$  e  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  è un autovettore (non nullo) ad esso relativo, allora la matrice  $C_1$ , avente la prima colonna uguale a  $c$  e tutte le altre colonne nulle è un autovettore per  $\Lambda_A$ , relativo a  $\lambda$ . D'altra parte, se  $\Lambda_A(X) = \mu X$  per una qualche matrice non-nulla  $X$ , allora le colonne (non nulle) di  $X$  sono autovettori per  $A$ , relativi all'autovalore  $\mu$ .

Da ciò si deduce che, se  $A$  ammette un sottospazio  $W \subseteq C^n$  di dimensione  $k$  di autovettori relativi all'autovalore  $\lambda$ , allora  $\Lambda_A$  ha un sottospazio di dimensione  $nk$  di autovettori relativi allo stesso autovalore, ovvero il sottospazio di  $M_n(C)$  formato dalle matrici le cui colonne appartengono a  $W$ .

(b). Se  $f(X) \in C[X]$ , allora, per ogni matrice  $X \in M_n(C)$ ,  $f(\Lambda_A)(X) = f(A) \cdot X$  e quindi se  $f(A) = 0$  allora  $f(\Lambda_A)$  è l'applicazione lineare nulla. D'altro canto, se  $f(A) \neq 0$  allora  $f(\Lambda_A)(\mathbf{1}) = f(A) \cdot \mathbf{1} = f(A) \neq 0$  e quindi il polinomio minimo di  $\Lambda_A$  deve coincidere con il polinomio minimo di  $A$ .

L'affermazione sulla diagonalizzabilità discende facilmente, dato che un endomorfismo è diagonalizzabile se, e solo se, il suo polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti.  $\square$

**ESERCIZIO 6.** Si consideri l'endomorfismo  $\phi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ , avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di  $\phi$ , una matrice di Jordan  $J$  di  $\phi$  ed una matrice  $P \in \text{GL}(4, \mathbb{Q})$  tale che  $J = P^{-1}AP$ .

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico è  $\det(X\mathbf{1} - A) = (X + 3)^4$ . Inoltre, si ha

$$A + 3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad (A + 3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A + 3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -20 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico. I vettori  $v_1 = (\phi + 3)^3(e_4) = 10e_1 + 10e_3$ ,  $v_2 = (\phi + 3)^2(e_4) = -10e_3$ ,  $v_3 = (\phi + 3)(e_4) = e_1 - 2e_2 + e_3 - 4e_4$  e  $v_4 = e_4$  formano una base rispetto a cui  $\phi$  ha matrice di Jordan  $J$  e dunque le matrici

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 10 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste.  $\square$

**ESERCIZIO 7.** Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, sia dato il triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determinino l'area del triangolo  $PQR$  e l'equazione del piano  $\pi_1$  che lo contiene.
- Indicato con  $\pi_0$  il piano di equazione  $z = 0$ , si determinino (se esistono) dei punti  $X$  tali che la proiezione su  $\pi_0$ , di centro  $X$ , del triangolo  $PQR$  sia un triangolo equilatero.
- Si determinino (se esistono) dei punti  $Y$  tali che la proiezione su  $\pi_0$  del triangolo  $PQR$  sia un triangolo avente la stessa area del triangolo originale.

*Svolgimento.* (a). Consideriamo i vettori  $Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  ed  $R - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , allora, l'area del triangolo  $PQR$  è  $A = \frac{1}{2} \|(Q - P) \times (R - P)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; inoltre,  $(Q - P) \times (R - P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  è un vettore normale al piano  $\pi_1$ , quindi l'equazione del piano è  $\pi_1 = x + y + z = 2$ .

(b). Qualunque sia il centro di proiezione  $X$ , esterno ai piani  $\pi_0$  e  $\pi_1$ , i punti  $P$  ed  $R$  appartengono all'intersezione tra i due piani e quindi vengono mandati in sé dalla proiezione di centro  $X$ . Dunque il triangolo proiettato su  $\pi_0$  è equilatero se, e solo se la proiezione di  $Q$  è il terzo vertice di un triangolo equilatero di lato  $PQ$ . Poichè  $\|Q - P\| = \sqrt{2}$ , i punti del piano  $\pi_0$  che siano il terzo vertice di un triangolo equilatero di lato  $PQ$  sono determinati dalle equazioni

$$\begin{cases} z = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \\ x^2 + (y - 2)^2 = 2 \end{cases} \quad \text{e quindi sono} \quad C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I punti  $X$  cercati stanno quindi sulle due rette

$$r_1 = Q + C_1 : \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2y - (\sqrt{3} + 1)z = 3 + \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 = Q + C_2 : \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2y + (\sqrt{3} - 1)z = 3 - \sqrt{3} \end{cases},$$

con l'esclusione dei punti  $Q$ ,  $C_1$  e  $C_2$ .

(c). Il triangolo proiettato su  $\pi_0$  ha la stessa area di  $PQR$  se, e solo se la proiezione di  $Q$  appartiene a due rette del piano  $\pi_0$ , parallele al vettore  $R - P$ , a distanza  $\frac{2A}{\|R - P\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}$  da  $P$  (e da  $R$ ). Le due rette hanno equazioni

$$s_1 : \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{e} \quad s_2 : \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

e quindi i punti  $Y$  cercati stanno sui due piani

$$\sigma_1 = Q + s_1 : x + y + (1 - \sqrt{3})z = 2 + \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = Q + s_2 : x + y + (1 + \sqrt{3})z = 2 - \sqrt{3},$$

con l'esclusione di  $Q$  e dei punti appartenenti alle rette  $s_1$  ed  $s_2$ . □

**ESERCIZIO 8.** Nello spazio euclideo  $E^3$ , dotato di un riferimento ortonormale, si consideri l'affinità di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} + 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che  $X$  è la matrice di un'isometria (orientata) priva di punti uniti.

(b) Si scriva l'isometria  $X$  come composizione di una rotazione seguita da una traslazione parallela all'asse di rotazione.

*Svolgimento.* (a). La matrice  $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  è ortogonale ( ${}^tRR = \mathbf{1}$ ) ed ha determinante 1; quindi  $X$  è la matrice di un'isometria (orientata) dello spazio euclideo. In particolare,  $R$  ha un sottospazio di dimensione 1 di autovettori relativi all'autovalore 1, cioè il sottospazio  $H = \left\langle \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Ricordiamo che  $X$  è la matrice di una rotazione se, e solo se, ammette una retta di punti uniti, e ciò accade se, e solo se,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \in H^\perp = \text{im}(R - \mathbf{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Poichè ciò non accade,  $X$  è la matrice di un'isometria (orientata) priva di punti uniti.

(b). A partire dalla decomposizione ortogonale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2-\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

si deduce la decomposizione della matrice  $X$ , ovvero

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2-\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2-\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

che è la decomposizione cercata. □

**ESERCIZIO 9.** Si consideri l'ellisse  $\mathcal{C}$  del piano euclideo, di equazione affine

$$\mathcal{C} : 11x^2 - 6xy + 19y^2 - 60x - 20y = 0.$$

- (a) Si determinino il centro, gli assi, i fuochi e l'equazione canonica di  $\mathcal{C}$ .  
 (b) Si determini inoltre la matrice di un'affinità che trasforma  $\mathcal{C}$  nel cerchio con centro nell'origine e raggio uguale al semiasse maggiore di  $\mathcal{C}$ .

*Svolgimento.* Si tratta dell'ellisse non degenera (con punti reali), di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -30 & -10 \\ -30 & 11 & -3 \\ -10 & -3 & 19 \end{pmatrix},$$

essendo  $\det A = -20000$  e  $\det A' = 200$ . La matrice  $A' = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$  ha gli autovalori 20 e 10, i cui spazi di autovettori corrispondono ai punti impropri  $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  e  $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , le cui polari sono gli assi di  $\mathcal{C}$ . In particolare, la direzione dell'asse focale è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore minore, ovvero  $Q_\infty$ . Quindi gli assi di  $\mathcal{C}$  sono

$$h_1 : x - 3y = 0 \text{ (asse focale),} \quad \text{ed} \quad h_2 : 3x + y = 10.$$

Il centro è l'intersezione degli assi, ovvero il punto di coordinate affini  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . In base a quanto visto, l'equazione canonica dell'ellisse  $\mathcal{C}$  è quindi  $\frac{X^2}{10} + \frac{Y^2}{5} = 1$ . I fuochi hanno coordinate omogenee  $F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6+3\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \end{pmatrix}$  ed  $F_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6-3\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} \end{pmatrix}$ . Infine, un'affinità che trasformi  $\mathcal{C}$  nel cerchio con centro nell'origine e raggio uguale al semiasse maggiore di  $\mathcal{C}$  si può trovare portando l'origine degli assi nel centro di  $\mathcal{C}$ , portando gli assi coordinati sugli assi di  $\mathcal{C}$  ed infine, modificando le unità di misura sugli assi in modo da far coincidere il valore dei due semiasse dell'ellisse col semiasse maggiore. Si può quindi considerare l'affinità di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{20}} \end{pmatrix}, \quad \text{e si ha} \quad \frac{1}{100} {}^t X A X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

che è la matrice di una circonferenza con centro nell'origine e raggio  $\sqrt{10}$ . □

**ESERCIZIO 10.** Nel piano euclideo si consideri la parabola  $\mathcal{C}$ , di asse  $h : 3x - 2y = 0$ , con vertice nell'origine e passante per il punto  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ .

Si scriva l'equazione della generica conica appartenente al fascio di circonferenze tangenti a  $\mathcal{C}$  in  $P$  e si determinino quali sono le coniche degeneri del fascio.

*Svolgimento.* Supponiamo, come di consueto, il piano euclideo immerso nel piano proiettivo reale prendendo la retta  $x_0 = 0$  come retta impropria. La parabola  $\mathcal{C}$  appartiene al fascio di coniche tangenti alla retta impropria nel punto improprio di  $h$  e tangenti nell'origine alla retta (per tale punto) perpendicolare ad  $h$ . Dunque, si tratta delle coniche di equazioni omogenee  $\alpha(3x_1 - 2x_2)^2 + \beta x_0(2x_1 + 3x_2) = 0$ , al variare dei parametri omogenei  $(\alpha, \beta)$ . La condizione di passaggio per il punto  $P$  determina in modo univoco l'equazione di  $\mathcal{C}$ , che è:

$$\mathcal{C} : 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_0x_1 + 6x_0x_2 = 0.$$

La retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P$  è  $t : 22x - 6y = 9$ . Il fascio cercato ha come punti base, i punti ciclici  $I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ ,

$\bar{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$  (dato che deve essere un fascio di circonferenze) ed il punto  $P$  (con molteplicità 2). Ciò significa che la coppia di rette isotrope passanti per  $P$  e la coppia formata da  $t$  e dalla retta impropria sono due coniche degeneri del fascio cercato e quindi sono sufficienti per determinarlo in modo completo. Le due coniche degeneri hanno equazioni omogenee  $\mathcal{D}_1 : 4x_1^2 + (2x_2 + 3x_0)^2 = 0$  e  $\mathcal{D}_2 : x_0(9x_0 - 22x_1 + 6x_2) = 0$ , e quindi la generica conica del fascio ha equazione

$$\alpha[4x_1^2 + (2x_2 + 3x_0)^2] + \beta x_0(9x_0 - 22x_1 + 6x_2) = 0 \quad \text{al variare dei parametri omogenei } (\alpha, \beta).$$

Non vi sono coniche degeneri nel fascio ad eccezione di  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$ , come si può verificare osservando che il determinante della matrice della generica conica del fascio è  $2^6 7 \alpha \beta^2$ .  $\square$





---

**Esame di Geometria (laurea in Fisica)**prova scritta del 15 settembre 2000

---

**ESERCIZIO 1.** Si consideri lo spazio vettoriale  $\mathbb{Q}^6$ , dotato della base canonica  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_6\}$ .(a) Dati i sottospazi  $U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ,  $W = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle$  e

$$Z = \langle e_1 - e_3 + e_4 + 2e_6, e_1 + 2e_2 + 4e_4 + e_5 + 4e_6, e_1 + e_2 - 2e_3 + e_4 - e_5 + 3e_6 \rangle,$$

si verifichi che  $Z$  è il grafico di un'applicazione lineare  $\phi : U \rightarrow W$  e si determinino  $\ker\phi$ ,  $\text{im}\phi$  e la matrice di  $\phi$  rispetto alle basi date di  $U$  e  $W$ .(b) È vero o falso che  $W$  è il grafico di un'applicazione lineare  $\psi : U \rightarrow Z$ ? In caso affermativo, cosa si può dire della sua matrice?

*Svolgimento.* (a). Un sottospazio  $Z \subset U \oplus W$  è il grafico di un'applicazione lineare  $\phi : U \rightarrow W$  se, e solo se,  $\dim Z = \dim U$  e  $Z \cap W = \langle 0 \rangle$ . Indicata con  $A$  la matrice che ha come colonne le coordinate dei generatori di  $Z$ , si può osservare che il minore estratto dalle prime tre righe è uguale a  $-3$  e quindi  $\dim Z = 3$  e  $Z + W = \mathbb{Q}^6$ . Ciò è sufficiente per concludere che  $Z$  è il grafico di un'applicazione lineare. Per determinare la matrice di  $\phi$ , è sufficiente osservare che, si ha  $AP = A'$ , ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{Q}) \quad \text{ed} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice di  $\phi$  rispetto alle basi date di  $U$  e  $W$  è  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Si tratta di una matrice invertibile e quindi  $\ker\phi = \langle 0 \rangle$  ed  $\text{im}\phi = W$ .(b). Poiché il minore estratto dalle ultime 3 righe di  $A'$  è diverso da zero ( $\det B = 1$ ), si ha che  $\mathbb{Q}^6 = U \oplus Z$  e, avendosi  $\dim W = 3 = \dim U$  e  $Z \cap W = \langle 0 \rangle$ , si ha che  $W$  è il grafico di un'applicazione lineare  $\psi : U \rightarrow Z$ . Dato un vettore  $u \in U$ ,  $\psi(u)$  è quell'unico vettore, appartenente a  $Z$ , tale che  $u + \psi(u) \in W$ . Quindi, detta  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_3\}$  la base di  $Z$  costituita dalle colonne della matrice  $A'$ , si ha che  $z_1 = e_1 + w_1$ , con  $w_1 = \phi(e_1) \in W$ , e quindi  $e_1 - z_1 \in W$ , ovvero  $\psi(e_1) = -z_1$ . Analogamente,  $\psi(e_2) = -z_2$  e  $\psi(e_3) = -z_3$ . Ricordando la relazione tra  $A$  ed  $A'$ , si ricava che la matrice di  $\psi$  rispetto alle basi date sopra di  $U$  e  $Z$ , è  $-P$ .  $\square$ **ESERCIZIO 2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n \geq 1$  (su  $\mathbb{C}$ ) ed indichiamo con  $V_{\mathbb{R}}$  lo stesso insieme, pensato come spazio vettoriale reale. Data un'applicazione  $\mathbb{C}$ -lineare,  $\phi : V \rightarrow V$ , indicheremo con  $\phi_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$  la stessa applicazione pensata come elemento di  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ .(a) Si mostri che la naturale inclusione  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \subset \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$  che associa  $\phi$  a  $\phi_{\mathbb{R}}$  non è suriettiva.(b) Si mostri che, per ogni  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ , si ha  $\det(\phi_{\mathbb{R}}) = |\det\phi|^2$ .

*Svolgimento.* (a). Osserviamo che, dato un qualunque spazio vettoriale complesso  $V$ , di  $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ , si ha  $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2n$ . Infatti, se  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  su  $\mathbb{C}$ , allora i vettori  $\{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$  sono una base di  $V_{\mathbb{R}}$  su  $\mathbb{R}$ .

Nelle ipotesi date,  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) = n^2$  e quindi si tratta di uno spazio vettoriale reale di dimensione  $2n^2$  che è contenuto propriamente in  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ , essendo  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) = (2n)^2$ .Un facile esempio di applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare, ma non  $\mathbb{C}$ -lineare, si ha considerando la  $\mathbb{R}$ -base  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}} = \{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$  di  $V_{\mathbb{R}}$  descritta sopra e l'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare,  $\sigma : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ , definita ponendo

$$\sigma(v_1) = v_1, \quad \dots, \quad \sigma(v_n) = v_n, \quad \sigma(iv_1) = -iv_1, \quad \dots, \quad \sigma(iv_n) = -iv_n.$$

(b). Si considerino una base  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$  su  $\mathbb{C}$ , e la base  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}} = \{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$  di  $V_{\mathbb{R}}$  su  $\mathbb{R}$ . Dato un omomorfismo di  $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali  $\phi : V \rightarrow V$ , possiamo scrivere la sua matrice  $\alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}(\phi) = A + iB$  con  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . La matrice di  $\phi_{\mathbb{R}}$  rispetto alla base  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$  è quindi uguale a

$$\alpha_{\mathcal{V}_{\mathbb{R}}, \mathcal{V}_{\mathbb{R}}}(\phi_{\mathbb{R}}) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Applicando operazioni elementari sulle righe e sulle colonne, si ha

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \det \left[ \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \det \begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ B & A - iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB) \end{aligned}$$

che dimostra quanto richiesto.  $\square$

**ESERCIZIO 3.** Si consideri lo spazio vettoriale complesso  $\mathbb{C}^4$ , dotato della forma hermitiana  $h(w, z) = \overline{w}Hz$ , ove

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i & 1 - i \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -i & 2 & -1 & 1 + 2i \\ 1 + i & 0 & 1 - 2i & 2 \end{pmatrix}$$

e  $z, w \in \mathbb{C}^4$ . Si determinino due sottospazi  $W_+$  e  $W_-$  tali che la restrizione di  $h$  a  $W_+$  sia definita positiva, la restrizione di  $h$  a  $W_-$  sia definita negativa,  $W_+ = W_-^\perp$  e  $V = W_+ \oplus W_-$ . Si scriva il vettore  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$  come somma di un vettore di  $W_+$  e di un vettore di  $W_-$ .

*Svolgimento.* Per ottenere la decomposizione voluta è sufficiente trovare una base ortogonale di  $\mathbb{C}^4$  relativamente ad  $h$ . I vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2-2i \\ 3+5i \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

formano una base ortogonale, rispetto a cui  $h$  ha matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

e quindi i sottospazi  $W_+ = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$  e  $W_- = \langle v_2 \rangle$  danno una decomposizione del tipo richiesto.

Poichè i due sottospazi sono ortogonali tra loro e  $\dim W_- = 1$ , per decomporre il vettore  $w$  nel modo richiesto, è sufficiente determinare una costante  $\alpha \in \mathbb{C}$  tale che  $w - \alpha v_2 \in W_-^\perp$ , ovvero, tale che  $h(v_2, w - \alpha v_2) = 6\alpha - 7i + 8 = 0$ . Dunque  $w = \frac{7i-8}{6}v_2 + (w - \frac{7i-8}{6}v_2)$ , e  $\frac{7i-8}{6}v_2 \in W_-$ ,  $w - \frac{7i-8}{6}v_2 \in W_-^\perp = W_+$ .  $\square$

**ESERCIZIO 4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $2n$  sul corpo  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali e sia  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$  un'applicazione bilineare alternante non-degenere.

- (a) Si mostri che  $V = L_1 \oplus L_2$  ove  $L_1$  ed  $L_2$  sono sottospazi isotropi di dimensione  $n$ , posti in dualità da  $g$ .  
 (b) Se  $B$  è la matrice di  $g$  rispetto ad una qualsiasi base di  $V$ , si mostri che  $\det B$  è un quadrato in  $\mathbb{Q}$ .

*Svolgimento.* (a). La dimostrazione si può fare per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$  e  $\{v, w\}$  è una base di  $V$ , allora, posto  $L_1 = \langle v \rangle$  ed  $L_2 = \langle w \rangle$ , si ha la decomposizione voluta, perchè, essendo  $g$  alternante, ogni vettore è

isotropo, e inoltre, essendo  $g$  non-degenere, deve aversi  $g(v, w) = a \neq 0$ . Dunque  $g$  è un'applicazione bilineare non degenere tra  $L_1$  ed  $L_2$ , ovvero i due spazi sono in dualità. In particolare,  $\{v\}$  e  $\{\frac{1}{a}w\}$  sono basi duali dei due spazi  $L_1$  ed  $L_2$ .

Supponiamo che la tesi sia vera per gli spazi di dimensione  $2k$ , con  $1 \leq k < n$ , e dimostriamola per quelli di dimensione  $2n$ . Siano dunque  $V$  e  $g$  come sopra e si scelga un vettore non-nullo  $v_1 \in V$ . Poichè  $g$  è non-degenere, esiste un vettore  $w_1 \in V$  tale che  $g(v_1, w_1) = 1$  e quindi la restrizione di  $g$  al sottospazio  $\langle v_1, w_1 \rangle$  è non-degenere. Per il teorema di decomposizione ortogonale, si ha  $V = \langle v_1, w_1 \rangle \oplus \langle v_1, w_1 \rangle^\perp$ , e la restrizione di  $g$  a  $\langle v_1, w_1 \rangle^\perp$  è non-degenere. Per l'ipotesi induttiva, l'enunciato è vero per questo sottospazio e quindi esistono due sottospazio isotropi  $L'_1$  ed  $L'_2$  di  $\langle v_1, w_1 \rangle^\perp$ , duali rispetto a  $g$ , e tali che  $\langle v_1, w_1 \rangle^\perp = L'_1 \oplus L'_2$ . Osserviamo che,  $L_1 = L'_1 \oplus \langle v_1 \rangle$  è un sottospazio isotropo. Infatti dati comunque due vettori  $x, y \in L'_1$ , si ha

$$g(av_1 + x, bv_1 + y) = abg(v_1, v_1) + ag(v_1, y) + bg(x, v_1) + g(x, y) = 0$$

perchè ogni vettore di  $L'_1$  è ortogonale a  $v_1$  ed  $L'_1$  è un sottospazio isotropo. Analogamente anche  $L_2 = L'_2 \oplus \langle w_1 \rangle$  è un sottospazio isotropo, e si ha

$$L_1 \oplus L_2 = \langle v_1 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle \oplus L'_1 \oplus L'_2 = \langle v_1, w_1 \rangle \oplus \langle v_1, w_1 \rangle^\perp = V.$$

Inoltre, se  $\{v_2, \dots, v_n\}$  e  $\{w_2, \dots, w_n\}$  sono basi di  $L'_1$  ed  $L'_2$  duali tra loro tramite  $g$  (ovvero  $g(v_i, w_j) = \delta_{ij}$ , per  $2 \leq i, j \leq n$ ), le basi  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\{w_1, \dots, w_n\}$  di  $L_1$  ed  $L_2$  sono duali tra loro tramite  $g$ .

In particolare, da ciò si conclude che la matrice di  $g$  rispetto alla base  $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$  di  $V$  è uguale ad

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

(b). In base a quanto visto nel punto precedente, esiste una matrice invertibile  $P \in \text{GL}(2n, \mathbb{Q})$ , tale che  $B = {}^tPIP$  e quindi  $\det B = (\det P)^2$ . □

**ESERCIZIO 5.** Si considerino le cosiddette matrici di Pauli in  $M_2(\mathbb{C})$ , ovvero

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcolino  $\exp(\frac{1}{2}it\sigma_1)$ ,  $\exp(\frac{1}{2}it\sigma_2)$  ed  $\exp(\frac{1}{2}it\sigma_3)$ , al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$  e si verifichi che queste matrici appartengono al gruppo  $SU_2$ .

(b) Si verifichi che ogni elemento  $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU_2$ , con  $ab \neq 0$ , si può scrivere nella forma

$$\exp(\frac{1}{2}i\phi\sigma_3) \exp(\frac{1}{2}i\vartheta\sigma_1) \exp(\frac{1}{2}i\psi\sigma_3)$$

per opportuni  $\phi, \psi, \vartheta \in \mathbb{R}$ . Le costanti  $\phi, \psi, \vartheta$ , sono dette gli angoli di Eulero in  $SU_2$ .

*Svolgimento.* (a). Si osservi che

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\exp(\frac{1}{2}it\sigma_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & i \sin(t/2) \\ i \sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix}.$$

Analogamente, si osservi che

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_2\right) = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & -\sin(t/2) \\ \sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix}.$$

Infine, dato che  $\sigma_3$  è una matrice diagonale, si ha

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_3\right) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}.$$

È immediata la verifica che, detta  $X$  una qualsiasi di queste matrici, si ha  ${}^t\overline{X}X = \mathbf{1}$  e  $\det X = 1$ , ovvero che  $X \in SU_2$ .

(b). Fissati comunque  $\phi, \psi, \vartheta \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\exp\left(t\frac{1}{2}i\phi\sigma_3\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\vartheta\sigma_1\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\psi\sigma_3\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}e^{i\frac{\phi+\psi}{2}} & -\sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\frac{\phi-\psi}{2}} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{-i\frac{\phi-\psi}{2}} & \cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i\frac{\phi+\psi}{2}} \end{pmatrix}.$$

D'altro canto, data  $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU_2$ , si ha  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , e quindi esiste un numero reale  $\vartheta \in [0, \pi]$  tale che  $|a| = \cos\frac{\vartheta}{2}$  e  $|b| = \sin\frac{\vartheta}{2}$ . Scritti i numeri in forma esponenziale,  $a = |a|e^{i\alpha}$  e  $b = |b|e^{i\beta}$ , dobbiamo quindi trovare dei numeri reali  $\phi$  e  $\psi$  tali che

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\psi + \phi}{2} \\ \beta = \frac{\psi - \phi}{2} \end{cases}$$

ed è sufficiente che le uguaglianze siano verificate a meno di multipli interi di  $2\pi$ . Possiamo quindi prendere  $\phi = \alpha - \beta$  e  $\psi = \alpha + \beta$ .

Lasciamo al lettore il facile compito di scrivere delle analoghe decomposizioni delle matrici di  $SU_2$  quando  $a = 0$  oppure  $b = 0^{(*)}$ .  $\square$

**ESERCIZIO 6.** Si consideri l'endomorfismo  $\phi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ , avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di  $\phi$ , una matrice di Jordan  $J$  di  $\phi$  ed una matrice  $P \in GL(4, \mathbb{Q})$  tale che  $J = P^{-1}AP$ .

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di  $\phi$  è  $\det(A - x\mathbf{1}) = (x - 2)^4$ . Inoltre, si ha

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ove  $\text{rk}(A - 2\mathbf{1}) = 2$  ed  $(A - 2\mathbf{1})^2 = \mathbf{0}$ . Dunque il polinomio minimo di  $\phi$  è  $(x - 2)^2$  e le matrici cercate sono

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

(\*) Cosa succede degli angoli di Eulero di  $SU_2$  tramite la rappresentazione ortogonale  $SU_2 \rightarrow SO_3$ , descritta per mezzo dell'azione di  $SU_2$  sui quaternioni puri?

E ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 7.** Si scriva una matrice (rispetto alla base canonica) della proiettività di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$  che lascia fissi il punto  $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e tutti i punti del piano  $\pi : x_1 + x_3 = 0$  e che trasforma  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  in  $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

*Svolgimento.* Sia  $\{e_0, \dots, e_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{Q}^4$  e sia  $\phi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$  una soprastante della proiettività in questione. Le condizioni date, dicono che il sottospazio  $\langle e_0, e_2, e_1 - e_3 \rangle$ , sostegno di  $\pi$ , è un sottospazio di autovettori per  $\phi$ , relativi ad un autovalore  $\alpha \neq 0$ . Inoltre, anche il sostegno di  $C$ , ovvero il sottospazio  $\langle e_1 + e_3 \rangle$ , è sottospazio di autovettori per  $\phi$ , relativi ad un autovalore non nullo  $\beta \neq \alpha$ . Infine, la condizione che il punto  $P$  venga trasformato in  $Q$ , implica che  $\phi(e_1) = \gamma e_3$  per un opportuna costante  $\gamma \neq 0$ . Quindi l'omomorfismo  $\phi$  deve soddisfare alle condizioni

$$\phi(e_0) = \alpha e_0, \quad \phi(e_2) = \alpha e_2, \quad \phi(e_1 - e_3) = \alpha(e_1 - e_3), \quad \phi(e_1 + e_3) = \beta(e_1 + e_3), \quad \phi(e_1) = \gamma e_3,$$

da cui si deduce che

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 0 \\ \beta - \alpha = 2\gamma \end{cases}$$

e quindi che le matrici delle possibili applicazioni soprastanti sono del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

al variare di  $\alpha$  in  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . □

**ESERCIZIO 8.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 3 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

- (a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la distanza.
- (b) Si scriva l'equazione del luogo  $\mathcal{Q}$  dei punti dello spazio la cui distanza da  $r$  è uguale alla distanza da  $s$ .
- (c) Si determinino, se esistono, dei piani passanti per  $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$  che taglino su  $\mathcal{Q}$  una circonferenza.

*Svolgimento.* (a). La retta  $r$  passa per il punto  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  ed è parallela al vettore  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e la retta  $s$  passa per il punto  $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ed è parallela al vettore  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . In particolare le due rette non sono parallele tra loro e la loro distanza  $d$  si può calcolare come

$$d = \frac{|(Q - P) \cdot v \times w|}{\|v \times w\|} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Poiché le due rette hanno distanza positiva e non sono parallele tra loro, si tratta di due rette sghembe.

- (b). Un punto  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  è equidistante dalle due rette se, e solo se,

$$\frac{\|(X - P) \times v\|}{\|v\|} = \frac{\|(X - Q) \times w\|}{\|w\|}$$

da cui si deduce che le coordinate di  $X$  devono essere soluzioni dell'equazione

$$\mathcal{Q} : x^2 - 4xy - 10xz - 2y^2 - 4yz + z^2 - 20x + 28y + 16z + 4 = 0.$$

(c). Un piano  $\pi$  taglia una circonferenza su  $\mathcal{Q}$  se, e solo se, l'intersezione  $\pi \cap \mathcal{Q} \cap \pi_\infty$  è costituita da due punti appartenenti all'assoluto  $\mathcal{H}$ , ovvero alla conica (di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ) di equazioni  $\mathcal{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$ .

Dunque i piani che tagliano circonferenze su  $\mathcal{Q}$  hanno come giacitura (retta impropria corrispondente al sottospazio direttore) delle rette reali passanti per due dei punti (non-reali, e quindi coniugati) di intersezione tra  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{H}$ . Cerchiamo quindi di determinare l'intersezione

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0 \end{cases}.$$

Il fascio di coniche del piano improprio determinato da  $\mathcal{Q}$  ed  $\mathcal{H}$  contiene la conica degenera

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ [(2 - \sqrt{6})(2x_1 + x_2) - (x_3 - x_1)][(2 + \sqrt{6})(2x_1 + x_2) - (x_3 - x_1)] = 0 \end{cases}$$

che si spezza nelle due rette reali che danno le giaciture dei piani cercati.  $\square$

**ESERCIZIO 9.** Si consideri la parabola  $\mathcal{C}$  del piano euclideo, di equazione affine

$$\mathcal{C} : 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 4x + 6y = 0.$$

Si determinino il vertice, l'asse, il fuoco e la direttrice di  $\mathcal{C}$ . Si determinino inoltre l'equazione canonica di  $\mathcal{C}$  e la matrice di un'isometria che porta l'equazione di  $\mathcal{C}$  in forma canonica.

*Svolgimento.* Si tratta della parabola non degenera, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & -6 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

essendo  $\det A = -169$  e  $\det A' = 0$ . La direzione dell'asse della parabola è il sottospazio degli autovettori relativi all'autovalore nullo di  $A' = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ , ovvero il punto improprio  $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . L'asse della parabola è la polare della direzione  $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ , ortogonale a  $P_\infty$ , e quindi ha equazione affine  $h : 3x - 2y = 0$ . Il vertice di  $\mathcal{C}$  è il punto proprio di intersezione tra l'asse  $h$  e la parabola  $\mathcal{C}$ , ovvero l'origine del sistema di coordinate date  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Il fuoco è quell'unico punto  $F_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}$  dell'asse  $h$ , per cui la polare di  $F_t$ , la polare di  $Y_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e la retta  $F_t + Y_\infty^\perp$  concorrono ad uno stesso punto (perchè?), e quindi si tratta di determinare il valore di  $t$  per cui si abbia

$$\det \begin{pmatrix} 13t & 2 & 3 \\ 3 & -6 & 4 \\ 3t & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad t = -\frac{1}{26}.$$

Dunque il fuoco di  $\mathcal{C}$  è il punto di coordinate omogenee  $F = \begin{pmatrix} 26 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$  e la direttrice è la sua polare, ovvero la retta di equazione affine  $d : 4x + 6y = 1$ .

Restano quindi da determinare l'equazione canonica di  $\mathcal{C}$  e la matrice dell'isometria che porta  $\mathcal{C}$  nella sua forma canonica, ovvero la trasformazione che porta l'origine nel vertice di  $\mathcal{C}$ , l'asse delle ascisse nella retta tangente a  $\mathcal{C}$  nel vertice e l'asse delle ordinate sull'asse della conica. L'equazione canonica della parabola  $\mathcal{C}$  è  $2Y = \sqrt{13}X^2$ .

Infine, la matrice della trasformazione di coordinate è

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}, \quad \text{e si ha} \quad \frac{1}{\sqrt{13}} {}^t X A X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{13} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 10.** *Nel piano euclideo, si determini l'iperbole equilatera  $\mathcal{C}$  di centro in  $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , avente la retta  $r : x - 2y + 2 = 0$  come asintoto, e passante per  $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Si scriva l'equazione del fascio di cerchi tangenti a  $\mathcal{C}$  in  $P$  e si determinino le coniche degeneri di tale fascio.*

*Svolgimento.* Poiché  $\mathcal{C}$  è un'iperbole equilatera, il suo secondo asintoto è la retta  $s$ , passante per  $C$  e perpendicolare ad  $r$ , ovvero  $s : 2x + y + 4 = 0$ . Dunque  $\mathcal{C}$  appartiene al fascio di coniche bitangenti alla retta impropria nei due punti corrispondenti alle direzioni di  $r$  ed  $s$ , ovvero il fascio di coniche di equazioni omogenee

$$\lambda x_0^2 + \mu(2x_0 + x_1 - 2x_2)(4x_0 + 2x_1 + x_2) = 0$$

al variare dei parametri omogenei  $(\lambda, \mu)$ . La condizione di passaggio per il punto  $P$ , permette di determinare l'equazione di  $\mathcal{C}$ , ovvero  $\mathcal{C} : 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 8x - 6y + 6 = 0$ .

La retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P$  ha equazione  $t : 4x - 3y + 4 = 0$  ed il fascio di cerchi cercato contiene come coniche degeneri la coppia di rette isotrope uscente da  $P$ ,  $\mathcal{D}_1 : (x_0 + x_1)^2 + x_2^2 = 0$ , e la coppia formata da  $t$  e dalla retta impropria, ovvero  $\mathcal{D}_2 : x_0(4x_0 + 4x_1 - 3x_2) = 0$ . I cerchi del fascio hanno quindi equazioni omogenee

$$\lambda x_0(4x_0 + 4x_1 - 3x_2) + \mu[(x_0 + x_1)^2 + x_2^2] = 0$$

al variare dei parametri omogenei  $(\lambda, \mu)$ . □





**Esame di Geometria (laurea in Fisica)**  
prova scritta del 5 febbraio 2001

**ESERCIZIO 1.** Siano dati tre spazi vettoriali  $V, W, Z$ , di dimensione finita sul campo  $C$ , e due applicazioni lineari  $\phi : V \rightarrow W, \psi : W \rightarrow Z$ . Si mostri che

- (a)  $\text{rk}(\psi \circ \phi) = \text{rk}\phi$  se, e solo se,  $\ker\psi \cap \text{im}\phi = \langle 0 \rangle$ ;
- (b)  $\text{rk}(\psi \circ \phi) = \text{rk}\psi$  se, e solo se,  $\ker\psi + \text{im}\phi = W$ .
- (c) Si concluda che, dato un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$ , si ha  $\text{rk}(f \circ f) = \text{rk}f$  se, e solo se,  $V = \ker f \oplus \text{im}f$ .

*Svolgimento.* (a). Sia  $\text{im}\phi = U \subseteq W$ . Allora,  $\text{rk}(\psi \circ \phi) = \text{rk}\psi|_U \leq \dim U = \text{rk}\phi$ , e vale l'uguaglianza se, e solo se,  $\psi|_U$  è iniettiva, ovvero se, e solo se,  $\text{im}\phi \cap \ker\psi = \langle 0 \rangle$ .

(b). Si osservi che  $\text{rk}(\psi \circ \phi) = \text{rk}\psi$  se, e solo se,  $\text{im}\psi = \text{im}(\psi|_U)$ , e quindi se, e solo se,  $U = \text{im}\phi$  contiene un complementare di  $\ker\psi$ , ovvero se, e solo se  $\ker\psi + \text{im}\phi = W$ .

(c). La conclusione è immediata. □

**ESERCIZIO 2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n \geq 1$  (su  $\mathbb{C}$ ) ed indichiamo con  $V_{\mathbb{R}}$  lo stesso insieme, pensato come spazio vettoriale reale. Diremo che un'applicazione  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$  è  $\mathbb{C}$ -lineare, se  $\phi \in H = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ , mentre diremo che  $\phi$  è semi- $\mathbb{C}$ -lineare o antilineare se  $\phi(\alpha v) = \bar{\alpha}\phi(v)$ , per ogni  $v \in V$  ed ogni  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

- (a) Si mostri che l'insieme  $H'$  delle applicazioni antilineari è un sottospazio vettoriale reale di  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$  e se ne calcoli la dimensione.
- (b) Si mostri che  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) = H \oplus H'$ .

*Svolgimento.* (a). Sia  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $v$  come  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale; allora i vettori  $v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n$  formano una base di  $V_{\mathbb{R}}$  e la moltiplicazione per  $i$  in  $V$  diventa l'endomorfismo di  $V_{\mathbb{R}}$  di matrice (a blocchi)

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Scrivendo con blocchi analoghi le matrici (rispetto alla base data) degli elementi di  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ , si ha che una matrice  $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  rappresenta un elemento di  $H'$  se, e solo se,  $PJ = -JP$ , ovvero se, e solo se,  $B = C$  e  $D = -A$ . Dunque  $H'$  corrisponde al sottospazio delle matrici reali, di ordine  $2n$ , del tipo  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$  e quindi  $H'$  ha dimensione  $2n^2$  su  $\mathbb{R}$ .

(b). Sapendo che anche  $\dim_{\mathbb{R}} H = 2n^2$  ed,  $H \cap H' = \langle 0 \rangle$ , si potrebbe concludere che  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}) = H \oplus H'$  per motivi di dimensione. Più direttamente, si può osservare che

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} A+D & B-C \\ C-B & A+D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A-D & B+C \\ B+C & D-A \end{pmatrix} \right]$$

ove il primo addendo corrisponde ad un endomorfismo  $\mathbb{C}$ -lineare<sup>(†)</sup> di  $V_{\mathbb{R}}$ , mentre il secondo corrisponde ad un endomorfismo  $\mathbb{C}$ -antilineare e tale decomposizione è univocamente determinata. □

**ESERCIZIO 3.** Si considerino gli spazi vettoriali reali  $V$  e  $W$ , con le rispettive basi  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$  e  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$  e siano date le applicazioni bilineari simmetriche  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ed  $h : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ , di matrici

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

<sup>(†)</sup> Confronta l'Esercizio 2 del Compito del 15.09.2000.

rispetto alle basi date.

Si dica se esiste un'isometria  $\phi : V \rightarrow W$ , e, in caso affermativo, se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.

*Svolgimento.* Una tale isometria esiste se i due spazi hanno lo stesso indice di inerzia e quindi  $W$  ammette una base  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ , rispetto a cui  $h$  abbia matrice uguale a  $G$ .

Si osservi che  $w_2$  è un vettore isotropo, ortogonale al sottospazio  $\langle w_1, w_4 \rangle$ , e che la restrizione di  $h$  a questo sottospazio ha indice di inerzia 0 e quindi possiamo considerare i vettori isotropi  $w_1 + w_4$  e  $w_1 - w_4$ . In particolare,  $\langle w_2, w_1 + w_4 \rangle$  è un sottospazio isotropo di dimensione 2 di  $W$  e quindi sia  $g$  che  $h$  hanno indice di inerzia uguale a 0 e perciò esiste un'isometria tra i due spazi. Per trovare una base di  $W$ , rispetto a cui  $h$  abbia matrice uguale a  $G$  abbiamo bisogno di un ulteriore vettore isotropo, indipendente da  $w_2$  ed ortogonale a  $\langle w_1, w_4 \rangle$ ; dopo di che dovremo prenderli nell'ordine opportuno e moltiplicare i vettori per opportuni fattori, in modo da ottenere le entrate della matrice  $G$ .

Ora  $\langle w_1, w_4 \rangle^\perp = \langle w_2, -w_1 + 2w_3 + w_4 \rangle$  ed il vettore  $-w_1 + \frac{1}{2}w_2 + 2w_3 + w_4$  è isotropo. Se si pone

$$u_1 = \frac{1}{4}w_2, \quad u_2 = \frac{1}{2}(w_1 + w_4), \quad u_3 = \frac{1}{2}(w_1 - w_4), \quad u_4 = -w_1 + \frac{1}{2}w_2 + 2w_3 + w_4$$

si ha quindi la base cercata. Ciò significa che esiste un'isometria  $\phi : V \rightarrow W$ , di matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero che  ${}^tPHP = G$ . □

**ESERCIZIO 4.** Uno spazio di probabilità finito è il dato di un insieme finito  $S$  e di una funzione  $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\mu(s) \geq 0$  per ogni  $s \in S$  e  $\sum_{s \in S} \mu(s) = 1$ . Si consideri lo spazio vettoriale reale  $\mathcal{F}(S)$  di tutte le funzioni  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , dotato della forma lineare  $E : \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $E(f) = \sum_{s \in S} f(s)\mu(s)$ , e su  $\mathcal{F}(S)$  si ponga l'applicazione bilineare simmetrica  $f * g = \sum_{s \in S} f(s)g(s)\mu(s)$ .

Gli elementi di  $\mathcal{F}(S)$  sono detti *variabili casuali*, mentre gli elementi di  $\ker E$  sono detti *variabili casuali normalizzate*. Data una variabile casuale  $f$  ed una costante  $a \in \mathbb{R}$ , si definisce la *probabilità che  $f$  assuma il valore  $a$*  come il numero  $P(f = a) := \sum_{f(s)=a} \mu(s)$ .

- (a) Si mostri che ogni elemento di  $\mathcal{F}(S)$  differisce per una funzione costante da una variabile casuale normalizzata.
- (b) Data una variabile casuale  $f$ , si mostri che  $f = \sum_{a \in \mathbb{R}} a\chi_{f=a}$ , ove  $\chi_{f=a}$  è la funzione definita da

$$\chi_{f=a}(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(s) = a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

e gli addendi sono tutti nulli, ad eccezione di un numero finito.

- (c) Date due variabili casuali  $f$  e  $g$  si dice che  $f$  e  $g$  sono *indipendenti* se  $P(f = a, g = b) = P(f = a)P(g = b)$  per ogni coppia di numeri reali  $a, b$ . Si mostri che, se  $f$  e  $g$  sono due variabili casuali normalizzate indipendenti, allora  $f$  e  $g$  sono *ortogonali*, ovvero  $f * g = 0$ .

*Svolgimento.* (a). Sia  $a \in \mathbb{R}$  e consideriamo la funzione costante  $a \in \mathcal{F}(S)$  ( $a(s) = a$  per ogni  $s \in S$ ). Allora  $E(a) = a \sum_{s \in S} \mu(s) = a$ . Dunque, data una variabile casuale  $f$ , con  $E(f) = a$ , la variabile casuale  $f - a$  (la funzione costante  $a$ ) è normalizzata, perchè  $E(f - a) = E(f) - E(a) = 0$ .

(b). La funzione  $\chi_{f=a}$  è la funzione caratteristica del sottoinsieme dei punti  $s \in S$  ove  $f(s) = a$ . Data una variabile casuale  $f$ , per tutti gli  $a \in \mathbb{R}$ , eccetto un numero finito, si ha che  $\chi_{f=a}$  è la funzione identicamente nulla. Quindi la somma  $\sum_{a \in \mathbb{R}} a\chi_{f=a}$  ha solo un numero finito di addendi diversi da zero. Inoltre, dato  $s \in S$ ,

con  $f(s) = c$ , si ha  $\chi_{f=a}(s) = 0$  se  $a \neq c$  e  $\chi_{f=c}(s) = 1$  e quindi  $\sum_{a \in \mathbb{R}} a\chi_{f=a}(s) = c = f(s)$ . Poichè le due funzioni coincidono qualunque sia  $s \in S$ , si ha l'uguaglianza richiesta.

(c). Data una variabile casuale  $f = \sum_{a \in \mathbb{R}} a\chi_{f=a}$ , essendo  $E$  una forma lineare, si ha

$$E(f) = \sum_{a \in \mathbb{R}} aE(\chi_{f=a}) = \sum_{a \in \mathbb{R}} aP(f = a).$$

Se  $f$  e  $g$  sono due variabili casuali, allora

$$\begin{aligned} f * g = E(fg) &= E\left(\sum_{a \in \mathbb{R}} a\chi_{f=a} \sum_{b \in \mathbb{R}} b\chi_{g=b}\right) = E\left(\sum_{a,b \in \mathbb{R}} ab\chi_{f=a}\chi_{g=b}\right) = \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{R}} abE(\chi_{f=a}\chi_{g=b}) = \sum_{a,b \in \mathbb{R}} abP(f = a, g = b). \end{aligned}$$

Poiché  $f$  e  $g$  sono indipendenti e normalizzate, se ne deduce che

$$f * g = E(fg) = \sum_{a,b \in \mathbb{R}} abP(f = a, g = b) = \sum_{a,b \in \mathbb{R}} abP(f = a)P(g = b) = E(f)E(g) = 0$$

che è quanto dovevamo dimostrare. □

**ESERCIZIO 5.** Sia  $A \in M_n(\mathbb{C})$  una matrice che soddisfa alla condizione  $A^2 = A$ . Si mostri che  $\text{tr} A = \text{rk} A$ .

*Svolgimento.* Poichè  $A^2 - A = \mathbf{0}$ , il polinomio minimo di  $A$  divide  $X(X - 1)$ , e quindi la matrice  $A$  è simile ad una matrice diagonale  $D$  con  $r$  ( $0 \leq r \leq n$ ) entrate sulla diagonale uguali ad 1 e le rimanenti uguali a 0. Dunque,  $\text{tr} A = \text{tr} D = r$  ed  $r = \text{rk} D = \text{rk} A$ . □

**ESERCIZIO 6.** Si consideri l'endomorfismo  $\phi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ , di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di  $\phi$ , una matrice di Jordan  $J$  di  $\phi$  ed una matrice  $P \in \text{GL}(4, \mathbb{Q})$  tale che  $J = P^{-1}AP$ .

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di  $\phi$  è  $\det(A - x\mathbf{1}) = (x - 2)^4$ . Inoltre, si ha

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (A - 2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, ovviamente,  $(A - 2)^4 = \mathbf{0}$ . Dunque il polinomio minimo di  $\phi$  coincide con il polinomio caratteristico e le matrici cercate sono

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

E ciò conclude la discussione. □

**ESERCIZIO 7.** Siano  $r$  ed  $s$  due rette non parallele del piano euclideo ed indichiamo con  $c_1$  e  $c_2$  le rette isotrope del fascio  $\mathcal{F}$ , determinato da  $r$  ed  $s$ . Data una retta  $x$  del fascio  $\mathcal{F}$ , indicheremo con  $x^\perp$  la retta ortogonale appartenente allo stesso fascio.

- (a) Se  $x$  è una retta del fascio  $\mathcal{F}$ , si mostri che  $(c_1, c_2, r, x) = -(c_1, c_2, r, x^\perp)$ .  
 (b) Si determinino le rette  $h$  del fascio  $\mathcal{F}$  tali che  $(c_1, c_2, r, h)(c_1, c_2, s, h) = 1$  e si osservi che, se  $h$  è una soluzione di tale problema, anche  $h^\perp$  lo è.  
 (c) Dette  $h_1$  ed  $h_2$  le rette soddisfacenti alla condizione precedente, si verifichi che  $(r, s, h_1, h_2) = -1$ .

*Svolgimento.* I birapporti tra le rette coincidono con i birapporti tra i corrispondenti punti impropri, che indicheremo con la lettera maiuscola corrispondente al nome della retta.

(a). Scegliendo un riferimento ortonormale del piano euclideo che abbia  $r$  come asse delle ascisse, possiamo quindi supporre che i punti impropri delle rette in questione abbiano coordinate

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad X^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$(c_1, c_2, r, x) = -\frac{x_1 + ix_0}{x_1 - ix_0} \quad \text{e} \quad (c_1, c_2, r, x^\perp) = \frac{-i(x_0 - ix_1)}{i(x_0 + ix_1)} = \frac{x_1 + ix_0}{x_1 - ix_0}$$

che è quanto dovevamo verificare.

(b). Nelle ipotesi del punto precedente possiamo supporre che i punti impropri delle rette  $s$  ed  $h$  abbiano coordinate

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ s_1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ h_1 \end{pmatrix},$$

e quindi si ha

$$(c_1, c_2, r, h) = -\frac{h_1 + ih_0}{h_1 - ih_0} \quad \text{e} \quad (c_1, c_2, s, h) = \frac{(s_1 - is_0)(h_1 + ih_0)}{(s_1 + is_0)(h_1 - ih_0)}.$$

Dunque, la condizione  $(c_1, c_2, r, h)(c_1, c_2, s, h) = 1$  è equivalente a

$$(s_1 - is_0)(h_1 + ih_0)^2 = -(s_1 + is_0)(h_1 - ih_0)^2, \quad \text{ovvero} \quad s_1 h_1^2 + 2s_0 h_1 h_0 - s_1 h_0^2 = 0$$

le cui soluzioni sono i due punti impropri

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ -s_0 + \sqrt{s_0^2 + s_1^2} \end{pmatrix}, \quad \text{ed} \quad H_2 = H_1^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ -s_0 - \sqrt{s_0^2 + s_1^2} \end{pmatrix}.$$

(c). Possiamo concludere con un calcolo diretto

$$(r, s, h_1, h_2) = \frac{(-s_0 + \sqrt{s_0^2 + s_1^2})(-s_0^2 - s_0\sqrt{s_0^2 + s_1^2} - s_1^2)}{(-s_0 - \sqrt{s_0^2 + s_1^2})(-s_0^2 + s_0\sqrt{s_0^2 + s_1^2} - s_1^2)} = \frac{-s_1^2\sqrt{s_0^2 + s_1^2}}{s_1^2\sqrt{s_0^2 + s_1^2}} = -1.$$

Fine del calcolo<sup>(†)</sup>. □

<sup>(†)</sup> Il lettore più attento avrà notato che, in base al *Teorema di Laguerre*, le rette  $h_1$  ed  $h_2$  sono le bisettrici degli angoli formati da  $r$  ed  $s$  ed abbiamo quindi verificato che le bisettrici sono tra loro perpendicolari (cioè separano armonicamente le rette isotrope) e che separano armonicamente le rette  $r$  ed  $s$ . Queste condizioni possono essere prese come una caratterizzazione delle bisettrici.

**ESERCIZIO 8.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

e si verifichi che si tratta di due rette sghembe.

- (a) Si scriva l'equazione del luogo  $\mathcal{Q}$  dei punti  $X$  tali che  $\text{dist}(X, r) = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{dist}(X, s)$ , ove  $\text{dist}$  indica la distanza euclidea.
- (b) Si mostri che l'intersezione di  $\mathcal{Q}$  col piano  $\pi : x - z = 2$  è una conica a centro, non degenera, e se ne determinino gli eventuali asintoti.

*Svolgimento.* (a). La retta  $r$  passa per il punto  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ed è parallela al vettore  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e la retta  $s$  passa per il punto  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ed è parallela al vettore  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Dunque le due rette non sono parallele e quindi sono sghembe perchè la retta  $r$  è contenuta nel piano  $x - z = 0$ , mentre la retta  $s$  è contenuta nel piano  $x - z = 1$  per cui  $r \cap s = \emptyset$ .

Un punto  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  appartiene a  $\mathcal{Q}$  se, e solo se,

$$\frac{\|(X - P) \times v\|}{\|v\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|(X - Q) \times w\|}{\|w\|}$$

ovvero se, e solo se,

$$\mathcal{Q} : x^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 4x + 2y + 2z = 0.$$

(b). Consideriamo lo spazio euclideo, immerso nel modo consueto nello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  (piano improprio:  $x_0 = 0$ ). Omogeneizzando l'equazione di  $\mathcal{Q}$ , si ottiene una forma quadratica nelle coordinate omogenee, la cui applicazione bilineare associata ha matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La scelta del punto  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e dei vettori  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , fornisce un riferimento affine nel piano  $\pi : x - z = 2$  e sia

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice che ha come colonne le coordinate degli elementi del riferimento fissato. Allora una matrice della conica  $\mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{Q}$  è uguale ad

$$A = {}^t P B P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che  $\mathcal{C}$  è un'iperbole non degenera, i cui punti impropri corrispondono alle direzioni dei vettori  $v_1$  e  $v_1 + 2v_2$ . Il centro di  $\mathcal{C}$  è il punto  $C = P_0 - \frac{1}{2}v_2$  e quindi gli asintoti di  $\mathcal{C}$  sono le due rette di equazioni affini

$$a_1 : \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad a_2 : \begin{cases} x - z = 2 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$$

e ciò risponde alle domande poste. □

**ESERCIZIO 9.** Si consideri la parabola  $\mathcal{C}$  del piano euclideo, di equazione affine

$$\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 - 4xy + 10y - 4 = 0.$$

Si determinino il vertice, l'asse, il fuoco e la direttrice di  $\mathcal{C}$ . Si determinino gli eventuali punti della conica in cui la tangente è parallela all'asse delle ordinate.

*Svolgimento.* La direzione dell'asse è il punto improprio  $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  e quindi l'asse è la polare della direzione ortogonale, ovvero la retta  $h : x - 2y = 2$ , che interseca la conica nel vertice  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Un generico punto (proprio) dell'asse ha coordinate  $F_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t+2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$  e quindi, fissata una qualsiasi direzione (distinta da  $P_\infty$  e dalla sua ortogonale), ad esempio  $X_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , si ha che il punto  $F_t$  è il fuoco della conica se, e solo se, la polare di  $F_t$ , la polare di  $X_\infty$  e la retta per  $F_t$  perpendicolare ad  $X_\infty$  sono tre rette di uno stesso fascio, ovvero se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} 5t-4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2t+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 20t+2 = 0;$$

quindi il fuoco ha coordinate omogenee  $F = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}$  e la sua polare è la direttrice di equazione  $d : 4x + 2y = 9$ .

Una generica retta parallela all'asse delle ordinate ha equazione  $x = m$ , ed una tale retta è tangente a  $\mathcal{C}$  se, e solo se, l'equazione  $4y^2 - 2(2m - 5)y + (m^2 - 4) = 0$  ha una radice doppia. Ciò accade se, e solo se,  $m = \frac{41}{20}$  e quindi il punto della parabola ove la tangente è parallela all'asse delle ordinate è  $P = \begin{pmatrix} 40 \\ 82 \\ -9 \end{pmatrix}$ .  $\square$

**ESERCIZIO 10.** Nella retta proiettiva reale  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ , si considerino tre punti, a due a due distinti,  $P = \sigma \langle v \rangle$ ,  $P' = \sigma \langle v' \rangle$  e  $Q = \sigma \langle w \rangle$  e sia  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una forma quadratica che si annulli esattamente su  $\langle v \rangle$  e  $\langle v' \rangle$ .

- (a) Diremo che un punto  $Q' = \sigma \langle w' \rangle$ , distinto dai precedenti, è dalla stessa parte di  $Q$ , rispetto alla coppia  $P, P'$  se  $(P, P', Q, Q') > 0$ .  
 (b) Diremo che un punto  $Q' = \sigma \langle w' \rangle$ , distinto dai precedenti, è dalla stessa parte di  $Q$ , rispetto alla coppia  $P, P'$  se  $q(w)q(w') > 0$ .

Si mostri che le condizioni (a) e (b) sono equivalenti.

*Svolgimento.* A meno di moltiplicare  $v$  e  $v'$  per due opportune costanti (diverse da 0), possiamo supporre che  $w = v + v'$  e che  $w' = av + bv'$ . Allora  $(P, P', Q, Q') = \frac{a}{b}$  ed è positivo se, e solo se,  $a$  e  $b$  hanno lo stesso segno. Se  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$  sono le coordinate dei vettori di  $\mathbb{R}^2$  rispetto alla base  $\{v, v'\}$ , allora una forma quadratica che si annulli esattamente su  $\langle v \rangle$  e  $\langle v' \rangle$  è  $x_0x_1$  ed il suo valore su  $w = v + v'$  è uguale ad 1. Il valore di tale forma quadratica su  $w' = av + bv'$  è  $ab$ , che è positivo se, e solo se,  $a$  e  $b$  hanno lo stesso segno.

Dunque le due condizioni sono equivalenti.  $\square$