Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 11 giugno 2001

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la reciproca distanza.
(b) Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti X dello spazio per cui $d(X, r)^2 + d(X, s)^2 = 8$.
(c) Si mostri che qualunque piano taglia su $\mathscr{Q}$ un'ellisse (eventualmente degenere o senza punti reali).
(d) Si verifichi che esistono due famiglie di piani paralleli che tagliano su $\mathscr{Q}$ dei circoli.

Svolgimento. (a). La retta r passa per $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; dunque le due rette non sono parallele tra loro e si ha

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot v \times w|}{\|v \times w\|} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

Perciò si tratta di due rette sghembe.

(b). Sia $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un generico punto dello spazio. La condizione $d(X, r)^2 + d(X, s)^2 = 8$, si scrive quindi nella forma

$$\frac{\|\overrightarrow{PX} \times v\|^2}{\|v\|^2} + \frac{\|\overrightarrow{QX} \times w\|^2}{\|w\|^2} = 8$$

da cui si ottiene l'equazione

$$\mathscr{Q} : 2x^2 - 2xy + 2xz + 3y^2 + 3z^2 - 8y - 8z = 0.$$

(c). Consideriamo lo spazio euclideo immerso nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nel modo usuale. Una conica è un'ellisse, se interseca la retta impropria (del piano in cui giace) in due punti di coordinate non reali. Il fatto che ogni piano tagli su $\mathscr{Q}$ un'ellisse, significa che ogni retta del piano improprio interseca $\mathscr{Q}$ in due punti non reali, ovvero che la conica (proiettiva) che si ottiene intersecando $\mathscr{Q}$ con il piano improprio è una conica senza punti reali. Si ha

$$\mathscr{Q} \cap \pi_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi nelle coordinate omogenee $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ del piano π_∞, $\mathscr{Q} \cap \pi_\infty$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che è la matrice di un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva e quindi $\mathscr{Q} \cap \pi_\infty$ è una conica senza punti reali.

(d). Un'ellisse è un cerchio se interseca la retta impropria (del piano in cui giace) nei due punti corrispondenti alle direzioni isotrope di quel piano (ovvero punti impropri che soddisfano all'equazione dell'*assoluto* $\mathscr{H}$:

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$, che determina le direzioni isotrope nello spazio euclideo tridimensionale). Dobbiamo quindi determinare i piani reali che passano per coppie di punti soddisfacenti alle condizioni

$$\mathscr{Q} \cap \mathscr{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1(x_1 + 2x_2 - 2x_3) = 0 \end{cases} .$$

Si tratta quindi delle due famiglie di piani paralleli di equazioni affini $\sigma_h : x = h$ e $\tau_k : x + 2y - 2z = k$ $(h, k \in \mathbb{R})^{(\dagger)}$.

□

ESERCIZIO 2. *Si consideri lo spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}[x]_{deg\leq 4}$ formato dai polinomi, a coefficenti complessi, di grado minore o uguale a 4 e le applicazioni lineari*

$$\tau : \mathbb{C}[x]_{deg\leq 4} \longrightarrow \mathbb{C}[x]_{deg\leq 4} \qquad \text{e} \qquad \partial : \mathbb{C}[x]_{deg\leq 4} \longrightarrow \mathbb{C}[x]_{deg\leq 4}$$

$$P(x) \longmapsto P(x+1) \qquad\qquad P(x) \longmapsto P'(x)$$

(a) Si scrivano le matrici di τ e ∂ rispetto alla base $\mathcal{X} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

(b) Si verifichi che
- *τ è un isomorfismo;*
- *∂ è un endomorfismo nilpotente e si determini il minimo esponente k tale che $\partial^k(P) = 0$ per ogni $P \in \mathbb{C}[x]_{deg\leq 4}$;*
- *$\tau \circ \partial = \partial \circ \tau$.*

(c) Si verifichi che, per ogni $P(x) \in \mathbb{C}[x]_{deg\leq 4}$, si ha

$$\tau(P) = \left[1 + \partial + \frac{\partial^2}{2!} + \frac{\partial^3}{3!} + \frac{\partial^4}{4!}\right](P).$$

Cosa si può dire della matrice di Jordan dell'endomorfismo τ?.

Svolgimento. Tutte le risposte si ottengono con un calcolo diretto.

$$T = \alpha_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \alpha_{\mathcal{X},\mathcal{X}}(\partial) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det \tau = \det T = 1$ e quindi τ è un isomorfismo. D'altro canto, $\partial^5 P(x) = 0$ per ogni polinomio di grado non più di 4, mentre $\partial^4(x^4) = 4!$ e quindi ∂ è nilpotente, ed il suo periodo è 5.

$^{(\dagger)}$ I quattro punti di $\mathscr{Q} \cap \mathscr{H}$ sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-6i \\ 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+6i \\ 4-3i \\ 5 \end{pmatrix};$$

e le due rette (improprie) di equazioni omogenee $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ ed $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$, sono le uniche ad avere equazioni reali tra le sei rette passanti per questi quattro punti.

Utilizzando le matrici T e D, si calcola direttamente che

$$T = \mathbf{1}_5 + D + \tfrac{1}{2!}D^2 + \tfrac{1}{3!}D^3 + \tfrac{1}{4!}D^4,$$

da cui si deduce che $TD = DT$, ovvero che τ e ∂ commutano tra loro. Ovviamente, la commutazione si poteva dedurre dalle regole usuali sulla derivazione di funzioni composte e la scrittura di τ tramite le potenze di ∂ è un modo di scrivere in questo contesto la ben nota Formula di Taylor. □

ESERCIZIO 3. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi, a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3 e si consideri l'applicazione*

$$q: \quad V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P(x) \longmapsto P(1)P(-2) - P(-1)P(2)$$

(a) *Si verifichi che q è una forma quadratica su V e, fissata una base di V, si scriva la matrice dell'applicazione bilineare g, associata a q.*
(b) *Si dica se g è non-degenere e, in caso affermativo, si calcoli la segnatura (indice di inerzia) di g.*
(c) *Si determinino (se esistono) due sottospazi isotropi W_1 e W_2 di V, tali che $V = W_1 \oplus W_2$.*

Svolgimento. (a). È evidente che $q(P)$ è una funzione omogenea di grado 2, quindi dobbiamo verificare che l'applicazione $(P, Q) \mapsto q(P + Q) - q(P) - q(Q)$ è bilineare. Infatti, si ha

$$q(P + Q) - q(P) - q(Q) = P(1)Q(-2) + P(-2)Q(1) - P(-1)Q(2) - P(2)Q(-1)$$

che è lineare nelle variabili P e Q considerate separatamente.

Presa la base $\{1, x, x^2, x^3\}$, possiamo calcolare a partire dalla formula scritta sopra la matrice di g, ovvero

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -14 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ -14 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). Si ha $\det G = (72)^2$ e quindi g è un'applicazione bilineare non-degenere. Dalle entrate della matrice di g si deduce che il sottospazio $W_1 = \langle 1, x^2 \rangle$ (i polinomi "pari", ovvero quelli per cui $P(x) = P(-x)$) è isotropo, e quindi deve aversi $i(g) = 0$, perchè solo in questo caso uno spazio di dimensione 4 ammette sottospazi isotropi di dimensione 2. Anche il sottospazio $W_2 = \langle x, x^3 \rangle$ (i polinomi "dispari", ovvero quelli per cui $P(-x) = -P(x)$) è isotropo.

(c). Le considerazioni sull'indice di inerzia, ci dicono che due tali sottospazi esistono e da quanto detto, i sottospazi $W_1 = \langle 1, x^2 \rangle$ e $W_2 = \langle x, x^3 \rangle$ danno la decomposizione richiesta. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}_4) = (x - 2)^2(x - 3)^2$ e si ha

$$A - 2\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - 3\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}_4) = 3$, $\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}_4)^2 = 2$ e $\mathrm{rk}(A - 3\mathbf{1}_4) = 3$. Dunque il polinomio minimo deve coincidere con il polinomio caratteristico perchè il nucleo di $\phi - 3$ (risp. $\phi - 2$) ha dimensione 1 e quindi non può contenere l'immagine di $\phi - 2$ o di $(\phi - 2)^2$ (risp. $\phi - 3$ e $(\phi - 3)^2$) che ha in ogni caso dimensione strettamente maggiore di 1. Il polinomio minimo è $(x - 2)^2(x - 3)^2$ e quindi una matrice di Jordan per ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $v_4 = 2e_1 + e_2 - e_3$ appartiene a $\ker(\phi - 2)^2$, ma non a $\ker(\phi - 2)^2$, quindi possiamo porre $v_3 = (\phi - 2)(v_4) = -e_2 - e_4$. Inoltre, essendo $(\phi - 2)^2 \circ (\phi - 3)^2 = 0$, si ha $\ker(\phi - 3)^2 = \mathrm{im}(\phi - 2)^2$, e quindi si verifica facilmente che il vettore $v_2 = -e_1 + e_3$ appartiene a $\ker(\phi - 3)^2$, ma non a $\ker(\phi - 3)$; perciò possiamo porre $v_1 = (\phi - 3)(v_2) = 3e_2 + 2e_4$ ed ottenere così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a cui l'endomorfismo ϕ ha matrice J. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 4x^2 + y^2 - 4xy - 6x - 12y + 30 = 0.$$

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -3 & -6 \\ -3 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\det A = -225$ e $\det A' = 0$. Dunque si tratta di una parabola (non-degenere).

Il polinomio caratteristico di A' è $x^2 - 5x$. L'autovettore corrispondente all'autovalore 0, dà la direzione dell'asse della parabola, ovvero il punto improprio $P_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. All'autovalore 5, corrisponde la direzione ortogonale $P_\infty^\perp = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$; e l'asse di $\mathcal{C}$ è la polare di $P_\infty^\perp$, ovvero la retta $h : y - 2x = 0$, che interseca la parabola nel vertice $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. L'equazione canonica della parabola è $6Y - \sqrt{5}X^2 = 0$, e quindi la distanza del fuoco dal vertice è $\delta = \frac{3}{2\sqrt{5}}$. Il fuoco è il punto $F = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \frac{3}{2\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{10} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix}$ Infine, la direttrice è la polare del fuoco, ovvero la retta $d : 2x + 4y - 7 = 0$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 2 luglio 2001

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri l'ellisse di equazione*

$$\mathcal{E} : \begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 5 \\ z = 0 \end{cases} .$$

(a) *Indicato con $\mathscr{C}$ il cilindro verticale che taglia $\mathcal{E}$ sul piano xy, si determini l'equazione di un piano π, passante per l'origine, che tagli su $\mathscr{C}$ un cerchio C e si determinino centro e raggio di C.*

(b) *Sia P un punto della retta, passante per l'origine, perpendicolare a π, posto a distanza 6 da π. Si scriva l'equazione del cono $\mathscr{Q}$, di vertice P, che tagli su π il cerchio C. Si dica a che distanza dal punto P deve passare un piano σ che tagli su $\mathscr{Q}$ un cerchio di raggio 6.*

Svolgimento. (a). Il cilindro verticale (ovvero con asse parallelo all'asse z) ha equazione $\mathscr{C} : 4x^2 + 3y^2 = 5$. Un'ellisse è un cerchio se interseca la retta impropria (del piano in cui giace) nei due punti corrispondenti alle direzioni isotrope di quel piano (ovvero i punti impropri che soddisfano all'equazione dell'*assoluto* $\mathscr{H}$: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$, che determina le direzioni isotrope nello spazio euclideo tridimensionale). Dobbiamo quindi determinare i piani reali che passano per coppie di punti soddisfacenti alle condizioni

$$\mathscr{C} \cap \mathscr{H} \cap \pi_\infty : \begin{cases} 4x_1^2 + 3x_2^2 = 5x_0^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} .$$

I quattro punti che soddisfano a queste condizioni sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix};$$

e quindi le due rette (improprie) reali passanti per questi punti sono

$$r_1 = P_1 + P_2 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 - \sqrt{3}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad r_2 = P_3 + P_4 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + \sqrt{3}x_3 = 0 \end{cases} .$$

I piani passanti per l'origine che taglino un cerchio su $\mathscr{C}$ sono quindi $\pi_1 : x - \sqrt{3}z = 0$ e $\pi_2 : x + \sqrt{3}z = 0$. Ogni piano parallelo ad uno di questi due taglia un cerchio su $\mathscr{C}$. La scelta tra uno dei due piani è arbitraria; consideriamo quindi il piano π_1 ed osserviamo che un riferimento ortonormale su questo piano si ha prendendo come origine il punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e come base dello spazio direttore i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un punto $O + (y_1v_1 + y_2v_2)$ di π_1 appartiene a $\mathscr{C}$ se, e solo se,

$$4\left(y_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3y_1^2 = 5 \qquad \text{ovvero} \qquad 3y_1^2 + 3y_2^2 = 5;$$

ciò permette di concludere che π_1 taglia su $\mathscr{C}$ un cerchio con centro nell'origine O e raggio $r = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

(*b*). Un vettore ortogonale al piano π_1 è $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, che ha lunghezza 2. Dunque applicando il vettore $3n_1$ (oppure il suo opposto) nell'origine, si trova il punto P cercato che ha quindi coordinate $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Fissato un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dello spazio, $(X \neq P)$, il generico punto della retta $P + X$ ha rappresentazione parametrica

$$Y_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z+3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ed interseca il piano π_1 per $\alpha = -\dfrac{12}{x - \sqrt{3}z + 6}$ ed interseca il piano in un punto di $\mathcal{C}$ se, e solo se, le coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soddisfano all'equazione

$$\mathscr{Q} : 4(x-3)^2 + 3y^2 - \frac{5}{144}(x - \sqrt{3}z + 6)^2 = 0.$$

Il piano π_1, che ha distanza 6 da P ed è ortogonale all'asse del cono, taglia un cerchio di raggio $r = \sqrt{\frac{5}{3}}$ su $\mathscr{Q}$. Un semplice argomento di proporzionalità permette di concludere che il piano cercato deve essere parallelo a π_1 e trovarsi a distanza $36\sqrt{\frac{3}{5}}$ da P. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{deg\leq 7}$, formato dai polinomi a coefficenti reali, di grado minore o uguale a 7, ed i due sottospazi*

$$U_0 = \{ P(x) \in \mathbb{R}[x]_{deg\leq 7} \mid P(x) = P(-x) \} \qquad ed \qquad U_1 = \{ P(x) \in \mathbb{R}[x]_{deg\leq 7} \mid P(-x) = -P(x) \}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni dei due sottospazi esibendo una base per ciascuno di essi e si dica se $\mathbb{R}[x]_{deg\leq 7} = U_0 \oplus U_1$.*

(b) *Si considerino le applicazioni $\phi : U_0 \to U_1$ e $\psi : U_1 \to U_0$ definite in entrambo i casi dalla posizione $P(x) \mapsto x^7 P(\frac{1}{x})$. Si verifichi che le definizioni sono ben poste e si scrivano le matrici di ϕ e ψ rispetto alle basi fissate. È vero o falso che $\psi \circ \phi = 1_{U_0}$ e $\phi \circ \psi = 1_{U_1}$?*

(c) *Si determinino delle basi dei sottospazi, Γ_ϕ e Γ_ψ, di $\mathbb{R}[x]_{deg\leq 7}$, costituiti dai grafici di ϕ e di ψ e si determinino le dimensioni di tali sottospazi, dell'intersezione $\Gamma_\phi \cap \Gamma_\psi$, e del sottospazio generato $\Gamma_\phi + \Gamma_\psi$.*

Svolgimento. bl a. È immediata la verifica che $U_0 = \langle 1, x^2, x^4, x^6 \rangle$ ed $U_1 = \langle x, x^3, x^5, x^7 \rangle$ ed i generatori proposti sono chiaramente indipendenti. Le dimensioni dei due sottospazi sono entrambe uguali a 4 e l'intersezione tra i due si riduce al solo vettore nullo. Dunque $\mathbb{R}[x]_{deg\leq 7} = U_0 \oplus U_1$.

(b). Dato $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_7 x^7$, si ha $x^7 P(\frac{1}{x}) = a_0 x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^2 + \cdots + a_7$. Dunque la corrispondenza così descritta è una biiezione di $\mathbb{R}[x]_{deg\leq 7}$ in sé, che scambia tra loro i due sottospazi in quanto i coefficienti dei termini di grado pari di P vanno nei monomi di grado dispari del suo trasformato e viceversa. In base a quanto osservato, le matrici di ϕ e ψ nelle basi date sono quindi entrambo uguali ad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

e si ha $A^2 = \mathbf{1}_4$.

(c). Si ha

$$\Gamma_\phi = \{ u + \phi(u) \in U_0 \oplus U_1 \mid u \in U_0 \} = \langle 1 + x^7, x^2 + x^5, x^4 + x^3, x^6 + x \rangle$$

e

$$\Gamma_\psi = \{ u + \psi(u) \in U_0 \oplus U_1 \mid u \in U_1 \} = \langle x + x^6, x^3 + x^4, x^5 + x^x, x^7 + 1 \rangle$$

Quindi i due sottospazi coincidono e ciò permette di concludere la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, la forma quadratica*
$$10x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 3x_2^2 + 4x_2x_4 + 2x_3^2.$$
(a) *Si scriva la matrice dell'applicazione bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, corrispondente e si verifichi se è non degenere.*
(b) *Sia $H = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$. Si verifichi che g ristretto ad H è non degenere e si determini un generatore v_1 di $H^\perp$ tale che $v_1 - e_1 \in H$.*
(c) *Si consideri sul sottospazio H il prodotto scalare rispetto alla base $\{e_2, e_3, e_4\}$. Si determini, se esiste, una base ortonormale di H (rispetto al prodotto scalare) che sia anche una base ortogonale rispetto alla restrizione di g.*
(d) *Si determinino le segnature (indici di inerzia) di g su $\mathbb{R}^4$ e della sua restrizione ad H.*

Svolgimento. (a). La matrice dell'applicazione bilineare associata è
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
e $\det A = -42$. Dunque g è non degenere.

(b). e (d). La matrice A' della restrizione di g ad H si ottiene da A cancellando la prima riga e la prima colonna; questa matrice è chiaramente non-degenere e si ha $\det A' = -8$. Osserviamo inoltre che la restrizione di g ad H non è definita dato che il vettore e_4 è isotropo ed inoltre, la restrizione di g ad $\langle e_2, e_3\rangle$ è definita positiva e quindi la segnatura della restrizione di g ad H è uguale ad 1. Un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ortogonale ad H deve soddisfare alle condizioni
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases};$$
quindi $v_1 = e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 - \frac{13}{4}e_4$. Ricordando che la segnatura di g è uguale alla somma delle segnature delle restrizioni di g ad H e ad $H^\perp = \langle v_1\rangle$, ed osservando che $g(v_1, v_1) = \frac{21}{4}$, si conclude che $i(g) = 2$.

(c). La matrice A' della restrizione di g ad H, rispetto alla base $\{e_2, e_3, e_4\}$ (base ortonormale per il prodotto scalare) è simmetrica; quindi, in base al *Teorema Spettrale*, esiste una base ortonormale di H rispetto a cui (la restrizione di) g abbia matrice diagonale ed è la base formata dagli autovettori di A' normalizzati. Il polinomio caratteristico di A' è uguale a $-\det(A' - x\mathbf{1}_3) = (x-2)(x+1)(x-4)$, e si ha

Autovalori	2	-1	4
Autovettori	$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Il che conclude la discussione[(†)]. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

(†) Possiamo considerare la cosa da un punto di vista geometrico, pensando allo spazio proiettivo come $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, ed allo spazio euclideo immerso come complementare del piano $x_1 = 0$ (corrispondente al sottospazio H, dotato del prodotto scalare). Allora la forma quadratica corrisponde ad una quadrica in questo spazio ed il procedimento descritto permette di ridurla in forma canonica. In particolare, si tratta di un'*iperboloide ellittico*, perchè la sua restrizione al piano improprio ha punti reali e, avendo segnatura uguale a 2, non può contenere rette reali nel suo supporto (e quindi i suoi punti sono ellittici). L'equazione cannonica è $-8x^2 - 16y^2 + 4z^2 = 21$, come si vede facilmente considerando gli autovalori di A' ed il coefficiente $c = -\frac{\det A'}{\det A}$.

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = -\det(A - x\mathbf{1}_5) = (x-3)^5$ e si ha

$$A - 3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 3\mathbf{1}_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ed $(A - 3\mathbf{1}_5)^3 = \mathbf{0}$. Il polinomio minimo è quindi $(x-3)^3$e, considerando il rango delle potenze di $A - 3\mathbf{1}_5$, si conclude che

$$\dim\ker(\phi - 3) = 2, \qquad \dim\ker(\phi-3)^2 = 4, \qquad \dim\ker(\phi-3)^3 = 5;$$

e perciò la matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Preso il vettore $e_2 \notin \ker(\phi-3)^2$, si ha che i vettori

$$v_3 = e_2, \quad v_2 = (\phi-3)(e_2) = 2e_4, \quad v_1 = (\phi-3)^2(e_2) = -2e_4 + 2e_5,$$

sono linearmente indipendenti. Inoltre, il vettore $e_1 \in \ker(\phi-3)^2 \setminus \ker(\phi-3)$; quindi, posto

$$v_5 = e_1, v_4 = (\phi-3)(e_1) = -2e_1 - 2e_2 + 2e_3,$$

si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice J. Infatti, considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 10x^2 - 20xy - 5y^2 - 12x + 6y - 6 = 0.$$

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 10 & -10 \\ 3 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

con $\det A = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ e $\det A' = -2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Dunque si tratta di un'iperbole (non-degenere).

Il polinomio caratteristico di A' è $x^2 - 5x - 150$ le cui radici sono $\lambda_1 = 15$ e $\lambda_2 = -10$. Gli autovettori corrispondenti determinano le direzioni degli assi dell'iperbole, ovvero i punti impropri $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gli assi sono quindi le polari di questi due punti, ovvero le rette

$$h_1 : 2x - y - 1 = 0, \qquad \text{e} \qquad h_2 : x + 2y = 0 \text{ (asse focale)},$$

che si intersecano nel centro, ovvero nel punto C, di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'equazione canonica dell'iperbole è $\frac{5}{3}X^2 - \frac{10}{9}Y^2 = 1$, e quindi la distanza dei fuochi dal centro è $\delta = \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. I fuochi sono quindi i punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ovvero i punti di coordinate omogenee $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \pm 2\sqrt{30} \\ -2 \mp \sqrt{30} \end{pmatrix}$.

I punti di intersezione tra la conica e la retta impropria sono $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2+\sqrt{6} \end{pmatrix}$ e $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2-\sqrt{6} \end{pmatrix}$, le cui polari sono gli asintoti di $\mathcal{C}$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 27 agosto 2001

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri l'iperbole equilatera di equazione*

$$\mathscr{I}:\begin{cases} xy=5 \\ z=0 \end{cases}.$$

(a) Sia $P=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *un punto e si scriva l'equazione cartesiana del cono (quadrico) di vertice* P*, che taglia* $\mathscr{I}$ *sul piano* $z=0$.

(b) Si determinino, se esistono, delle direzioni v *del piano* $x-y=0$ *tali che ogni piano perpendicolare a* v *tagli sul cono una parabola.*

Svolgimento. (a). Sia $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un generico punto, diverso da P. La retta per P ed X interseca il piano $z=0$ nel punto di coordinate affini $\begin{pmatrix}1+\frac{x-1}{1-z}\\1+\frac{y-1}{1-z}\\0\end{pmatrix}$ e questi punti appartengono ad $\mathscr{I}$ se, e solo se, $[1+\frac{x-1}{1-z}][1+\frac{y-1}{1-z}]=5$, ovvero, moltiplicando i due membri per $(1-z)^2$ se, e solo se,

$$xy-xz-yz-4z^2+10z-5=0;$$

che è l'equazione (affine) del cono cercato.

(*b*). Una curva piana di secondo grado è una parabola se, e solo se, l'intersezione con la retta impropria del piano è un punto doppio. Per poter utilizzare i punti impropri, supponiamo di aver immerso lo spazio euclideo nello spazio proiettivo con la scelta usuale dell'iperpiano improprio di equazione omogenea $x_0=0$. Le direzioni del piano di equazione affine $x-y=0$ sono rappresentate dai vettori del tipo $\begin{pmatrix}0\\\alpha\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, al variare dei parametri omogenei (α,β). Dobbiamo quindi studiare i punti impropri dell'intersezione tra il cono ed un piano di equazione omogenea $\alpha(x_1+x_2)+\beta x_3=kx_0$, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_0=0 \\ \alpha(x_1+x_2)+\beta x_3=0 \\ x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3-4x_3^2=0 \end{cases},$$

al variare dei parametri omogenei (α,β) e vedere se esistono valori dei parametri omogenei per cui si ha come soluzione un punto, con molteplicità 2. Per $\beta\neq 0$, il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_0=0 \\ x_3=-\frac{\alpha}{\beta}(x_1+x_2) \\ \beta^2x_1x_2+(\alpha\beta-4\alpha^2)(x_1+x_2)^2=0 \end{cases},$$

che ha una radice doppia se, e solo se, $\beta^2+4\alpha\beta-16\alpha^2=0$ e quindi per $\beta=(-2\pm 2\sqrt{5})\alpha$. Lasciamo al lettore il compito di verificare che, per $\beta=0$, si hanno due radici distinte al sistema. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri lo spazio vettoriale complesso* $\mathbb{C}^4$*, ed i suoi sottospazi*

$$D=\langle e_3,e_4\rangle \qquad ed \qquad E=\langle (2-i)e_1+ie_3, e_2+(i-1)e_4\rangle.$$

(a) Si verifichi che $\mathbb{C}^4=D\oplus E$.

(b) *Siano $j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'inclusione canonica e $\pi : E \oplus D \to D$ la proiezione canonica. Si verifichi che l'applicazione composta*

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow[j]{} D \oplus E \xrightarrow[\pi]{} D$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali reali.

(c) *Tramite l'isomorfismo del punto precedente, l'applicazione $v \mapsto iv$ sui vettori di D, induce un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineare di $\mathbb{R}^4$. Se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica.*

Svolgimento. (a). È sufficiente verificare che i quattro vettori $e_3, e_4, (2-i)e_1 + ie_3, e_2 + (i-1)e_4$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$; e questo si può vedere facilmente, ad esempio, osservando che è diverso da zero il determinante della matrice che ha come colonne le coordinate dei quattro vettori.

(b). Le due applicazioni j e π sono entrambo $\mathbb{R}$-lineari (la seconda è anche $\mathbb{C}$-lineare) e quindi tale è l'applicazione composta, che è un isomorfismo se, e solo se, è iniettiva, perchè i due spazi hanno entrambo dimensione 4 su $\mathbb{R}$. Il nucleo dell'applicazione composta è dato dagli elementi di $\mathbb{R}^4 \cap E$ e questa intersezione è uguale a $\langle 0 \rangle$. Infatti, se $z[(2-i)e_1 + ie_3] + w[e_2 + (i-1)e_4]$ appartenesse ad $\mathbb{R}^4$, dovrebbe aversi w reale perchè appartenga ad $\mathbb{R}$ la seconda componente del vettore e quindi $w = 0$ perchè vi appartenga anche la quarta. Analogamente, dovrebbe aversi z puramente immaginario perchè appartenga ad $\mathbb{R}$ la terza componente e quindi $z = 0$ perchè vi appartenga anche la prima.

Un modo ancora più esplicito di verificare che $\pi \circ j$ è un isomorfismo consiste nello scriverne la matrice P, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ ed alla base $\mathcal{V} = \{e_3, e_4, ie_3, ie_4\}$ di D su $\mathbb{R}$. Osservando che

$$e_1 = \frac{1}{2-i}[((2-i)e_1 + ie_3) - ie_3] \qquad \text{ed} \qquad e_2 = (e_2 + (i-1)e_4) + (1-i)e_4,$$

si conclude che $\pi \circ j(e_1) = \frac{1+2i}{5}e_3$, $\pi \circ j(e_2) = (1-i)e_4$ ed ovviamente $\pi \circ j(e_3) = e_3$, $\pi \circ j(e_4) = e_4$. Quindi la matrice cercata è

$$P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\pi \circ j) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

che è chiaramente invertibile ed ha come inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c). La moltiplicazione per i in D ha matrice

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, la matrice dell'applicazione che ne resta indotta su $\mathbb{R}^4$ tramite l'isomorfismo del punto precedente è

$$I = P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione,. $\square$

ESERCIZIO 3. *Si consideri sullo spazio vettoriale reale V, con la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo*

$$q(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2.$$

(a) *Si scriva la matrice dell'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$, corrispondente e si verifichi se è non degenere.*
(b) *Si determini la segnatura (indice di inerzia) di g.*
(c) *Si dica quale tra le applicazioni bilineari di matrici*

$$(i)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (iii)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica, vada posta sullo spazio $\mathbb{R}^4$ affinché esista un'isometria $\phi : \mathbb{R}^4 \to V$ e si scriva la matrice di ϕ rispetto alle basi date.

Svolgimento. (a). La matrice dell'applicazione bilineare associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e $\det A = 11$. Dunque g è non degenere.
(b). Con calcoli standard si può determinare la base ortogonale

$$e_3, \quad e_4, \quad 2e_1 - e_4, \quad e_1 + 3e_2 - 6e_3 - 2e_4,$$

ripetto a cui g ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{pmatrix}$, da cui si può dedurre che g ha segnatura $i(g) = 0$.
(c). In base a quanto visto nel punto precedente, può esistere un'isometria tra V ed $\mathbb{R}^4$ se, e solo se, si pone su $\mathbb{R}^4$ l'applicazione bilineare di matrice (iii), che è l'unica tra quelle proposte ad avere segnatura nulla. Per scrivere un'isometria $\phi : \mathbb{R}^4 \to V$ è sufficiente determinare una base di V rispetto a cui g abbia matrice (iii). Una tale base è costituita dai vettori

$$w_1 = e_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_4, \quad w_2 = e_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_4, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 - e_4) + \frac{1}{\sqrt{33}}(e_1 + 3e_2 - 6e_3 - 2e_4),$$
$$w_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 - e_4) - \frac{1}{\sqrt{33}}(e_1 + 3e_2 - 6e_3 - 2e_4)$$

da cui si può dedurre la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\phi)$, essendo $\phi(e_i) = w_i$, per $i = 1, \dots, 4$. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = -\det(A - x\mathbf{1}_4) = (x + 2)^4$ e si ha

$$A + 2\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A + 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

ed $(A + 2\mathbf{1}_4)^3 = \mathbf{0}$. Il polinomio minimo è quindi $(x + 2)^3$e, considerando il rango delle potenze di $A + 2\mathbf{1}_4$, si conclude che

$$\dim\ker(\phi + 2) = 2, \qquad \dim\ker(\phi + 2)^2 = 3, \qquad \dim\ker(\phi + 2)^3 = 4;$$

e perciò una matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Preso il vettore $e_3 \notin \ker(\phi + 2)^2$, si ha che i vettori

$$v_4 = e_3, \quad v_3 = (\phi + 2)(e_3) = -4e_1 - e_2 - 4e_3 + e_4, \quad v_2 = (\phi + 2)^2(e_3) = -4e_2 + 4e_4,$$

sono linearmente indipendenti ed inoltre, il vettore $v_1 = 3e_1 + e_2 + 3e_3$ è un autovettore che completa i vettori dati ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice J. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 11x^2 - 4xy + 14y^2 + 22x - 4y + 5 = 0.$$

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & -2 \\ 11 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

con $\det A = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = -6 \cdot 150$ e $\det A' = 150$. Dunque si tratta di un'ellisse (non-degenere).

Il polinomio caratteristico di A' è $x^2 - 25x + 150$ le cui radici sono $\lambda_1 = 15$ e $\lambda_2 = 10$. Gli autovettori corrispondenti determinano le direzioni degli assi dell'ellisse, ovvero i punti impropri $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gli assi sono quindi le polari di questi due punti, ovvero le rette

$$h_1 : 2x + y + 2 = 0, \qquad \text{ed} \qquad h_2 : x - 2y + 1 = 0 \text{ (asse focale)},$$

che si intersecano nel centro, ovvero nel punto C, di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'equazione canonica dell'iperbole è $\frac{5}{3}X^2 + \frac{5}{2}Y^2 = 1$, e quindi la distanza dei fuochi dal centro è $\delta = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. I fuochi sono quindi i punti di cordinate omogenee $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $F_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $F_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 17 settembre 2001

ESERCIZIO 1. *Nello spazio $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri la sottovarietà lineare*

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino un punto, il sottospazio direttore e la dimensione di π.

(b) Si consideri la famiglia di sottovarietà lineari,

$$L_t : \begin{cases} (2-t)x_1 + (t-1)x_4 = t \\ x_2 + tx_3 + (2-t)x_4 = 1-t\ , \\ (2-t)x_1 + tx_2 = 2t \end{cases} \qquad \textit{al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la dimensione di L_t al variare di t.

(c) Detta L_2 la sottovarietà della famiglia, per $t = 2$, si verifichi che π ed L_2 sono sghembe e si determini la distanza tra π ed L_2.

Svolgimento. (a). Il sistema che definisce la sottovarietà π è omogeneo ed ha rango 2, quindi π passa per l'origine O ed ha dimensione 2. Il sottospazio direttore è generato da due soluzioni indipendenti del sistema (omogeneo), ad esempio da $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b). Il sistema lineare ha matrice (completa)

$$\begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 & t-1 & t \\ 0 & 1 & t & 2-t & 1-t \\ 2-t & t & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$$

che è riga equivalente a

$$B_t = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 & t-1 & t \\ 0 & 1 & t & 2-t & 1-t \\ 0 & 0 & -t^2 & 1-3t+t^2 & t^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $t^2(t-2) \neq 0$, matrice incompleta e matrice completa hanno entrambe rango 3. Per $t = 0$ e $t = 2$, si hanno le matrici

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e, ancora una volta, matrice incompleta e matrice completa hanno rango 3 in tutti e due i casi. In conclusione, possiamo dire che, qualunque sia il valore di t, il sistema definisce una sottovarietà lineare di dimensione 1, cioè una retta.

(c). La retta L_2, passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La distanza tra le due sottovarietà è la lunghezza ℓ del segmento perpendicolare ad entrambe che le congiunge. Come nel caso tridimensionale, questa lunghezza si può calcolare come un rapporto tra volumi, ovvero

$$\ell = \frac{vol^4\left(v_1, v_2, v, \overrightarrow{OP}\right)}{vol^3\left(v_1, v_2, v\right)}.$$

Dunque, posto

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $vol^4\left(v_1, v_2, v, \overrightarrow{OP}\right) = |\det X| = 1$, da cui si vede che L_2 e π sono sghembe, e inoltre $vol^3(v_1, v_2, v) = \sqrt{\det({}^tYY)} = \sqrt{5}$; quindi $\ell = \frac{1}{\sqrt{5}}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si calcoli* $\mathrm{rk}A$.

(b) *Si determinino due matrici* $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ *e* $Q \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$*, tali che* $PAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, ove* $\mathbf{1}_r$ *è la matrice identica di rango* $r = \mathrm{rk}A$.

(c) *Si mostri che il sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *generato dalle ultime* $4 - r$ *colonne di* Q *dipende solo dalla matrice* A.

Svolgimento. (a). La matrice A ha rango 2, come si può vedere, ad esempio, applicando la tecnica di eliminazione di Gauß, ed osservando che la matrice A è riga-equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). Indichiamo con $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice A rispetto alla base canonica. Poiché le due matrici P e Q sono invertibili, possiamo pensarle come matrici di cambiamento di base dei due spazi e quindi la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice di ϕ rispetto a basi opportune. In particolare, è sufficiente prendere due vettori $v_3 = 2e_1 + 5e_2 - e_3$ e $v_4 = 5e_1 + 4e_2 - e_4$, che siano una base del nucleo di ϕ e completarli, ad esempio con i vettori $v_1 = e_1$ e $v_2 = e_2$, ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$. Dopo di che la base di $\mathbb{R}^3$ deve essere costituita dai vettori $w_1 = \phi(v_1) = -2e_1 - e_2 + e_3$, $w_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, e da un qualunque vettore che completi questi due ad una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, ad esempio, il vettore $w_3 = -e_1 - e_2 + e_3$. Due possibili matrici sono quindi

$$Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che soddisfano alle condizioni poste.

(c). Lo spazio generato dalle ultime $4 - r$ colonne della matrice Q è il nucleo dell'applicazione di matrice PA. Poiché P è invertibile, questo nucleo deve coincidere con il nucleo di ϕ e quindi è il sottospazio generato dai vettori v_3, v_4 descritti sopra. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ *dotato dell'usuale prodotto scalare e sia* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione lineare autoaggiunta (simmetrica). Indicata con* $S = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1 \}$ *la sfera unitaria, sia* $u \in S$ *tale che* $u \cdot \phi(u) \leq v \cdot \phi(v)$ *per ogni vettore* v *di* S*. Posto* $\lambda = u \cdot \phi(u)$*, si mostri che*

(a) $x \cdot (\phi - \lambda)(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

(b) $x \cdot (\phi - \lambda)(u) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *e si concluda che* u *è un autovettore per* ϕ*, relativo all'autovalore* λ.

Restano vere le affermazioni se si sostituisce $\mathbb{R}^n$ *con* $\mathbb{C}^n$ *ed il prodotto scalare con una forma hermitiana definita positiva?*

Svolgimento. (a). Per ogni $v \in S$, si ha

$$v \cdot \phi(v) \geq u \cdot \phi(u) = \lambda(v \cdot v) = v \cdot (\lambda v),$$

perchè $v \cdot v = 1$, e quindi $v \cdot (\phi - \lambda)(v) = v \cdot \phi(v) - v \cdot (\lambda v) \geq 0$. Se poi x è un generico vettore di $\mathbb{R}^n$, allora $x = \|x\|v$, con $v = \frac{x}{\|x\|} \in S$, e quindi si conclude che $x \cdot (\phi - \lambda)(x) = \|x\|^2 v \cdot (\phi - \lambda)(v) \geq 0$.

(b). Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo i vettori del tipo $x + tu$, al variare di $t \in \mathbb{R}$. Deve aversi

$$0 \leq (x + tu) \cdot (\phi - \lambda)(x + tu) = 2t[x \cdot (\phi - \lambda)(u)] + x \cdot (\phi - \lambda)(x)$$

per ogni valore di t; e ciò è possibile se, e solo se, $x \cdot (\phi - \lambda)(u) = 0$. Poichè ciò accade per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$, si conclude che $(\phi - \lambda)(u) = 0$, cioè che u è un autovettore per ϕ, relativo all'autovalore λ.

Per quanto riguarda l'ultima domanda, basta ripercorrere i passi della dimostrazione ed osservare che, dalla disuguaglianza $0 \leq \overline{(x + tu)} \cdot (\phi - \lambda)(x + tu)$ si deduce $Re(\overline{x} \cdot (\phi - \lambda)(u)) = 0$ per ogni vettore x di $\mathbb{C}^n$; e quindi, scambiando x con ix, che $\overline{x} \cdot (\phi - \lambda)(u) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$, da cui si ottiene ancora una volta il fatto che u è un autovettore relativo all'autovalore λ. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}_4) = (x-2)^2(x-3)^2$ e si ha

$$A - 3\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A - 2\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

con $\operatorname{rk}(A - 3\mathbf{1}_4) = 2 = \operatorname{rk}((A - 2\mathbf{1}_4)^2)$ e $\operatorname{rk}(A - 2\mathbf{1}_4) = 3$. Il polinomio minimo è quindi $(x-2)^2(x-3)$, da cui si deduce che $\ker(\phi - 3) = \operatorname{im}(\phi - 2)^2$, dato che i due sottospazi sono contenuti l'uno nell'altro ed hanno la stessa dimensione. Una matrice di Jordan di ϕ è quindi

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Preso il vettore $e_1 - e_3 \in \ker(\phi - 2)^2 \setminus \ker(\phi - 2)$, si ha che i vettori

$$v_4 = e_1 - e_3, \quad v_3 = (\phi - 2)(e_1 - e_3) = -2e_2 - 2e_4, \quad v_2 = (\phi - 2)^2(e_1) = -e_1 + 5e_2 + 2e_3 + 5e_4,$$
$$v_1 = (\phi - 2)^2(e_2) = 3e_2 + 2e_4,$$

formano una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice J. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + 2xy + 2x + 6y - 5 = 0.$$

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\det A = 2$ e $\det A' = -1$. Dunque si tratta di un'iperbole (non-degenere).

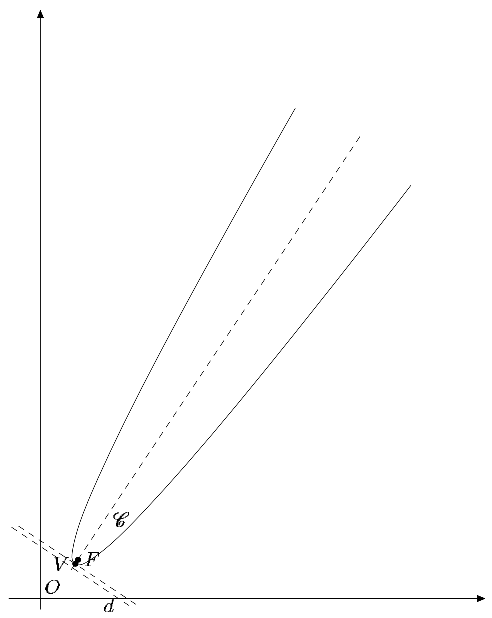
La matrice A' ha gli autovalori $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i cui autovettori relativi, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, sono le direzioni degli assi dell'iperbole. Il centro è il punto di coordinate affini $C = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ e gli assi sono quindi le rette

$h_1 : (3+\sqrt{5})x + (1+\sqrt{5})y + (7+\sqrt{5}) = 0$ ed $h_2 : (3-\sqrt{5})x + (1-\sqrt{5})y + (7-\sqrt{5}) = 0$ (asse focale)

è il punto improprio $P_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, e quindi l'asse è la polare della direzione ortogonale, $P_\infty^\perp = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, ovvero la retta di equazione affine $h : 3x - 2y - 1 = 0$. Il vertice della conica è il punto proprio di intersezione tra h ed il supporto di $\mathcal{C}$, ovvero il punto di coordinate omogenee $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, la cui polare è la retta di equazione affine $t = 2x + 3y - 5 = 0$. La matrice di un'isometria che porta l'equazione della conica in forma canonica è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 1 & \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad {}^tPAP = \sqrt{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{13} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La distanza del fuoco dal vertice è $\delta = \frac{1}{2\sqrt{13}}$, ed è il punto di coordinate omogenee $F = \left(\begin{smallmatrix} 26 \\ 28 \\ 29 \end{smallmatrix}\right)$.



Fine della trasmissione. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 20 febbraio 2002

ESERCIZIO 1. *Si considerino gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{R}$ con le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.*

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ che soddisfa alle seguenti condizioni

$$\phi(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = w_1 + w_2 + w_3, \qquad \phi(v_1 + v_2 + v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 2w_3,$$
$$\phi(v_1 + v_2) = w_1 - w_2, \qquad \phi(v_1 - v_2) = w_1 - w_2;$$

e se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.

(b) Si mostri che il sottoinsieme $Z = \{\, \psi \in Hom_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \phi \circ \psi = \phi \,\}$ è una sottovarietà lineare dello spazio affine $\mathbb{A}(Hom_{\mathbb{R}}(V, V))$ e se ne calcoli la dimensione.

(c) Sia $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : Hom_{\mathbb{R}}(V, V) \to M_4(\mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni endomorfismo di V associa la sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{V}$. Si determinino $k + 1$ punti $A_0, \dots, A_k$ di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$, in posizione generale, tali che la sottovarietà lineare da essi generata, $A_0 + \cdots + A_k$, sia l'immagine di Z in $M_4(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a). Imponendo la condizione che ϕ sia un'applicazione lineare, si deduce facilmente dalle condizioni date che deve aversi

$$\phi(v_1) = w_1 - w_2, \qquad \phi(v_2) = 0, \qquad \phi(v_3) = w_1 + 3w_2 + 2w_3, \qquad \phi(v_4) = -w_1 - w_2 - w_3;$$

e quindi

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b). L'insieme Z è formato da tutte le applicazioni lineari del tipo $1_V + \chi$, ove $1_V : V \to V$ è l'identità e $\phi \circ \chi = 0$; ovvero, χ varia nel sottospazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker \phi) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. Dunque si tratta della sottovarietà lineare $Z = 1_V + \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker \phi)$ dello spazio affine $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V))$ e la sua dimensione è

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker \phi) = (\dim V)(\dim \ker \phi) = 4 \dim \ker \phi = 8,$$

dato che ϕ ha rango 2 e $\ker \phi = \langle v_2, v_1 + v_3 + 2v_4 \rangle$.

(c). I punti $A_0, \dots, A_k$ di uno spazio affine, sono in posizione generale se, e solo se, i vettori $A_1 - A_0, \dots, A_k - A_0$ sono linearmente indipendenti. Possiamo quindi prendere le matrici $A_0, \dots, A_8$, con $A_0 = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(1_V) = \mathbf{1}_4$ e, per $j = 1, \dots, 8$, $A_j = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(1_V + \chi_j)$; ove $\chi_1, \dots, \chi_8$ è una base di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker \phi)$. Possiamo quindi prendere i seguenti punti di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 2&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&2&0&1 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&2&1 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

ESERCIZIO 2. *Siano u un vettore di lunghezza 1 in $\mathbb{R}^3$ ed $A \in O_3(\mathbb{R})$.*

(a) Si mostri che se A è la matrice di una rotazione di un angolo $\vartheta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) attorno all'asse $\langle u \rangle$, allora i sottospazi di autovettori di A (in $\mathbb{C}^3$) non dipendono dall'angolo ϑ.

(b) Si mostri che A è la matrice di una rotazione di asse $\langle u\rangle$ se, scelta (comunque) una base ortonormale, $\{v, w\}$, del sottospazio $\langle u\rangle^\perp$, tale che $\{u, v, w\}$ sia concorde con l'orientamento fissato, allora si ha $Au = u$ e $v + iw$ è un autovettore per A ($i^2 = -1$).

Svolgimento. (a). Se $\langle u\rangle$ è l'asse di rotazione, deve aversi $Au = u$, qualunque sia ϑ. Inoltre, scelta (comunque) una base ortonormale, $\{v, w\}$, del sottospazio $\langle u\rangle^\perp$, tale che $\{u, v, w\}$ sia concorde con l'orientamento fissato, allora deve aversi

$$A(v) = \cos\vartheta v + \sin\vartheta w \qquad \text{e} \qquad A(w) = -\sin\vartheta v + \cos\vartheta w.$$

Gli autovalori di A sono i numeri complessi $e^{i\vartheta}$ ed $e^{-i\vartheta}$ (distinti, perchè $\vartheta \neq \pi$), a cui corrispondono i sottospazi di autovettori $\langle v + iw\rangle$ e $\langle v - iw\rangle$, che sono quindi indipendenti dall'angolo di rotazione ϑ.

(b). Scelta comunque una base ortonormale, $\{v, w\}$, del sottospazio $\langle u\rangle^\perp$, tale che $\{u, v, w\}$ sia concorde con l'orientamento fissato, essendo $A \in O_3$ ed $A(u) = u$, deve aversi $A(v) = \cos\vartheta v + \sin\vartheta w$, per un opportuno angolo $\vartheta \in [0, 2\pi)$, ed $A(w) = \pm(-\sin\vartheta v + \cos\vartheta w)$. Da ciò si deduce che $A(v+iw) = (\cos\vartheta \mp i\sin\vartheta)(v \pm iw)$, a seconda della scelta del segno; e quindi $v+iw$ è un autovettore per A se, e solo se, $A(w) = -\sin\vartheta v+\cos\vartheta w$ e quindi A è la matrice di una rotazione di asse $\langle u\rangle$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 6 e si determinino tutti gli endomorfismi $\phi : V \to V$, di rango 3, per cui si abbia $\phi^3 = \phi^2 \neq \phi$. (Si scrivano le matrici di questi endomorfismi rispetto ad opportune basi)*

Svolgimento. Poiché $\phi^3 = \phi^2 \neq \phi$, si ha che il polinomio minimo di ϕ divide $X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$, ma non divide $X^2 - X$. Quindi il polinomio minimo di un tale endomorfismo può essere X^2, oppure $X^3 - X^2$. In entrambo i casi non si tratta di un prodotto di fattori lineari distinti e quindi non sono endomorfismi diagonalizzabili. Per ipotesi, si ha $3 = \dim\ker\phi < \dim\ker(\phi^2)$, ($\ker\phi$ è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore 0) e facciamo vedere che l'endomorfismo ϕ è completamente individuato dalla $\dim\ker(\phi^2)$, ovvero che la conoscenza di questa dimensione permette di scrivere la matrice di Jordan di ϕ.

Se $\dim\ker(\phi^2) = 4$, allora (essendo $\phi^3 = \phi^2$) il polinomio minimo è $X^3 - X^2$ ed il polinomio caratteristico deve essere $X^4(X - 1)^2$ e quindi la matrice di Jordan di un tale ϕ deve essere

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\dim\ker(\phi^2) = 5$, allora il polinomio minimo è $X^3 - X^2$ ed il polinomio caratteristico deve essere $X^5(X - 1)$ e per avere rango 3, la matrice di Jordan di un tale ϕ deve essere

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, se $\dim\ker(\phi^2) = 6$, allora il polinomio minimo è X^2 ed il polinomio caratteristico deve essere X^6 e, per avere rango 3, la matrice di Jordan di un tale ϕ deve essere

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}_4) = (x-2)^4$ e si ha

$$A - 2\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (A - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2\mathbf{1}_4)^3 = \mathbf{0},$$

con $\operatorname{rk}(A - 2\mathbf{1}_4) = 2$ e $\operatorname{rk}((A - 2\mathbf{1}_4)^2) = 1$. Il polinomio minimo è quindi $(x-2)^3$, ed una matrice di Jordan di ϕ è quindi

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Preso il vettore $e_2 \in \ker(\phi - 2)^3 \setminus \ker(\phi - 2)^2$, si ha che i vettori

$$v_4 = e_2, \quad v_3 = (\phi - 2)(e_2) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 - 3e_4, \quad v_2 = (\phi - 2)^2(e_2) = 3e_1 - 3e_3,$$
$$v_1 = 2e_1 + e_2 - e_4,$$

formano una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice J. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + 2xy + 2x + 6y - 5 = 0.$$

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\det A = 2$ e $\det A' = -1$. Dunque si tratta di un'iperbole (non-degenere).

La matrice A' ha gli autovalori $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i cui autovettori relativi, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (direzione dell'asse focale) e $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, sono le direzioni degli assi dell'iperbole. Il centro è il punto di coordinate affini $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e gli assi sono quindi le rette

$$h_1 : (1+\sqrt{5})x + 2y - (1-3\sqrt{5}) = 0 \qquad \text{ed} \qquad h_2 : (1-\sqrt{5})x + 2y - (1+3\sqrt{5}) = 0 \quad \text{(asse focale)}.$$

L'equazione canonica di quest'iperbole è $\frac{1+\sqrt{5}}{4}X^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{4}Y^2 = 1$ ed i fuochi sono i punti $F_\lambda = \begin{pmatrix} -3+\lambda(1+\sqrt{5}) \\ 2+2\lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}$. □