Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 25 febbraio 1997

ESERCIZIO 1. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$, si considerino i vettori*

$$v_1 = -6e_2 + 2e_3, \quad v_2 = e_1 - e_2 + 2e_3, \quad v_3 = -e_1 - 2e_2 - e_3$$

e

$$w_1 = 2e_1, \quad w_2 = 2e_3, \quad w_3 = e_1 - 2e_3.$$

Si scrivano le matrici, rispetto alla base canonica, di tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che mandano ordinatamente v_i su w_i per $i = 1, 2, 3$.

Svolgimento. I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti; infatti, si ha

$$v_1 - 2v_2 = 2e_1 - 4e_2 - 2e_3 = 2v_3.$$

Poichè anche i vettori w_1, w_2, w_3 soddisfano alla stessa relazione, si tratta di determinare gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che mandano ordinatamente v_i su w_i per $i = 1, 2$. È chiaro che si tratta di un problema lineare nelle entrate della matrice incognita e che perciò ogni soluzione si ottiene come somma di una soluzione particolare con una soluzione del problema omogeneo associato. In particolare, quest'ultimo è l'insieme delle matrici che mandano a zero i vettori v_1 e v_2, ovvero le cui righe sono multipli di un generatore di $\langle v_1, v_2 \rangle^\perp \subset V^*$. Dunque, le soluzioni del problema sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5a & a & 3a \\ -5b & b & 3b \\ -5c & c & 3c \end{pmatrix} \qquad \text{al variare di } a, b, c \in \mathbb{R}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Dati due vettori v^* e w^* dello spazio duale V^*, il prodotto esterno $v^* \wedge w^*$ è l'applicazione bilineare alternante su V, definita dalla posizione*

$$v^* \wedge w^*(x, y) = (v^* \circ x)(w^* \circ y) - (v^* \circ y)(w^* \circ x),$$

per ogni coppia $(x, y) \in V \times V$.

(a) *Siano $v^*, w^* \in V^*$ due vettori linearmente indipendenti. Si mostri che il nucleo dell'applicazione bilineare $v^* \wedge w^*$ è esattamente il sottospazio $\langle v^*, w^* \rangle^\perp \subseteq V$.*

(b) *Si consideri lo spazio vettoriale W e la sua base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$. Dati i vettori*

$$v^* = w_2^* - w_3^*, \quad w^* = w_1^* - 2w_3^* - w_4^*, \quad u^* = w_1^* - 2w_4^*, \quad t^* = 2w_1^* - 2w_2^* + w_3^*$$

dello spazio duale, si scriva la matrice dell'applicazione bilineare alternante $v^* \wedge w^* + u^* \wedge t^*$ e se ne determini il nucleo.

Svolgimento. (a). A partire dalla definizione data sopra,è immediato verificare che, se $x \in \langle v^*, w^* \rangle^\perp$, allora, qualsiasi sia $y \in V$, si ha $v^* \wedge w^*(x, y) = 0$, perchè in ciascuno dei due addendi compare un fattore uguale a zero. D'altra parte, sia x_0 un qualsiasi vettore al di fuori del sottospazio $\langle v^*, w^* \rangle^\perp$ e supponiamo, per fissare le idee, che si abbia $v^* \circ x_0 \neq 0$. Allora, preso un vettore y_0 che appartenga a $\langle v^* \rangle^\perp$, ma non a $\langle v^*, w^* \rangle^\perp$, allora si ha $v^* \wedge w^*(x, y) = (v^* \circ x_0)(w^* \circ y_0) \neq 0$. Un discorso analogo si poteva fare se fosse stato $v^* \circ x_0 = 0$ e quindi $w^* \circ x_0 \neq 0$ e ciò dimostra che il nucleo di $v^* \wedge w^*$ è esattamente uguale a $\langle v^*, w^* \rangle^\perp$.

(b). Possiamo quindi scrivere la matrice G dell'applicazione bilineare data come somma di prodotti di righe o colonne contenenti le coordinate dei vettori v^*, w^*, u^*, t^*. Precisamente, si ha

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1,0,-2,-1) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} (0,1,-1,0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} (2,-2,1,0) - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1,0,0,-2) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda il nucleo di tale applicazione bilineare, con un calcolo diretto si verifica che $\det G = 49$ e quindi che si tratta di un'applicazione bilineare non-degenere. □

ESERCIZIO 3. *Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V, con $U \cap W = (0)$.*

(a) Si dimostri che un sottospazio $Z \subseteq U \oplus W$ è il grafico di un'applicazione (lineare) $\psi : U \to W$ se, e solo se, $\dim Z = \dim U$ e $Z \cap W = (0)$.

(b) Si considerino i sottospazi di $\mathbb{Q}^5$

$$U = L(e_3, e_1 + e_2, e_5 - 2e_4), \quad W = L(e_1 - e_2 + 2e_4, e_2 + e_5),$$
$$Z = L(2e_1 + 2e_2 + 2e_4 - e_5,\ e_2,\ e_3 + e_1).$$

Si verifichi che Z è il grafico di un'applicazione lineare $\psi : U \to W$ e si scriva la matrice di ψ rispetto alle basi date di U e W.

Svolgimento. (a). Sotto tali ipotesi, la restrizione a Z della proiezione canonica $p_U : U \oplus W \to U$ è un omomorfismo iniettivo, perchè $\ker p_U = W$ e $Z \cap W = (0)$. Essendo $\dim Z = \dim U$, la restrizione della proiezione detta è un isomorfismo e quindi, fissato comunque un vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $w \in W$ tale che $u + w \in Z$; ed essendo Z un sottospazio vettoriale, si verifica facilmente che l'applicazione $u \mapsto w$ così definita è un'applicazione lineare da U su W di cui Z è il grafico.

(b). È chiaro che $\dim Z = \dim U = 3$ ed inoltre, si ha $W \cap Z = (0)$, come si può facilmente verificare osservando che la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori delle basi di tali sottospazi ha rango 5. Dunque, indicati con u_1, u_2, u_3 i tre vettori della base data di U, con w_1, w_2 i due vettori della base data di W e con z_1, z_2, z_3 i tre vettori della base data di Z, si tratta di trovare le costanti α_i e β_i, tali che

$$u_i + \alpha_i w_1 + \beta_1 w_2 \in Z \qquad \text{ovvero} \qquad u_i + \alpha_i w_1 + \beta_1 w_2 = \gamma z_1 + \delta z_2 + \varepsilon z_3$$

per $i = 1, 2, 3$. In tal modo si trova che la matrice dell'applicazione lineare $\psi : U \to W$ di cui Z è il grafico è $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ che è quanto dovavamo determinare. □

ESERCIZIO 4. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determini l'indice di inerzia di g.

Si dica quale tra le seguenti affermazioni è vera e si determini una base soddisfacente alle condizioni ivi descritte.

(b_1) *Vi è una base di* $\mathbb{R}^4$ *rispetto a cui* g *ha matrice* $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

(b_2) *Vi è una base di* $\mathbb{R}^4$ *rispetto a cui* g *ha matrice* $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

(b_3) *Vi è una base di* $\mathbb{R}^4$ *rispetto a cui* g *ha matrice* $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento. (a). Osserviamo che il sottospazio $U = \langle e_1, e_4\rangle$ è un sottospazio isotropo di dimensione 2 e ciò ci permette di concludere che $i(g) = 0$; ciò perchè U deve avere intersezione banale con entrambo i sottospazi W_+ e W_- di una decomposizione di $\mathbb{R}^4$ del tipo descritto nel teorema di Sylvester e ciò può accadere solo se entrambo i sottospazi hanno dimensione 2.

(b). È chiaro che l'unica asserzione compatibile con l'indice di inerzia di g è (b_2). Una base rispetto a cui g abbia la matrice in questione è, ad esempio, e_1, $\frac{1}{2}e_2$, $3e_1 + 2e_4$, $\frac{1}{64}(3e_1 + 8e_2 + 8e_3 + 2e_4)$. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri l'endomorfismo* $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, *avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1&0&2&0\\ -1&1&2&-1\\ -1&0&1&0\\ -2&2&2&3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, *una matrice di Jordan* J *di* ϕ *ed una base* $\{v_1, \dots, v_4\}$ *di* $\mathbb{C}^4$ *rispetto a cui* ϕ *abbia matrice* J.

Svolgimento. Il Polinomio caratteristico di ϕ è uguale a $p_\phi(X) = (x^2 + 1)(X^2 - 4X + 5)$ che ha quindi 4 radici distinte in $\mathbb{C}$ e, precisamente i, $-i$, $2 + i$, $2 - i$. Dunque il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico che è prodotto di fattori lineari distinti e perciò ϕ è diagonalizzabile e una sua matrice di Jordan è uguale a

$$\Delta = \begin{pmatrix} i&0&0&0\\ 0&-i&0&0\\ 0&0&2+i&0\\ 0&0&0&2-i \end{pmatrix}.$$

Per determinare una base di autovettori, osservo che, poichè ϕ ha matrice reale, al coniugato dell'autovalore α corrisponde il sottospazio di autovettori generato dal coniugato di un qualunque autovettore relativo ad α. Inoltre, se a e b sono due vettori di $\mathbb{R}^4$, il vettore $a + ib$ è un autovettore relativo all'autovalore i se, e solo se, $(A - i\mathbf{1}_4)(a + ib) = 0$ e ciò è equivalente alle condizioni

$$\begin{cases} (A^2 + 1)b = 0 \\ a = Ab \end{cases}.$$

Analogamente, considerando l'autovalore $2 + i$, e $c, d \in \mathbb{R}^4$, si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} ((A - 2)^2 + 1)c = 0 \\ d = (A - 2)c \end{cases}$$

affinchè $c + id$ sia un autovettore relativo a $2 + i$. Si ottiene quindi la base di autovettori

$$v_1 = -(e_1 + e_3) + i(e_1 + e_2), \quad v_2 = -(e_1 + e_3) - i(e_1 + e_2), \quad v_3 = e_2 + i(2e_4 - e_2), \quad v_4 = e_2 - i(2e_4 - e_2),$$

rispetto a cui ϕ ha matrice uguale a Δ. □

ESERCIZIO 6. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Sia dato inoltre, l'endomorfismo $\psi : V \to V$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 2 \\ -5 & 9 & -7 & -5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\mathcal{V}$.
(a) Si mostri che ψ è nilpotente e si determini il minimo intero positivo q tale che $\psi^q = 0$ (il periodo di ψ).
(b) Si determini una decomposizione $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$ del tipo descritto nel Lemma 6.4.3 del testo.

Svolgimento. (a). Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad A^3 = 0;$$

quindi ψ è un endomorfismo nilpotente di periodo 3.
(b). Guardando al rango delle matrici A ed A^2, si vede che $\dim \ker \psi = 2$ e $\dim \ker(\psi^2) = 4$ e inoltre, si ha $\ker(\psi^3) = V$. Allora, $V = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$, ove

$$H_3 = \langle v_1 \rangle, \qquad H_2 = \langle \psi(v_1), v_5 \rangle = \langle 3v_4 - 2v_2 - 5v_3, v_5 \rangle,$$
$$H_1 = \langle \psi^2(v_1), \psi(v_5) \rangle = \langle v_2 + 2v_3 - v_4, v_1 + 2v_2 + 4v_3 - 3v_4 \rangle,$$

che è quanto si doveva mostrare. □

ESERCIZIO 7. *Ricordiamo che un'omologia dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una proiettività $\sigma : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che ammette un iperpiano H di punti uniti. Di conseguenza, esiste un punto C, detto centro dell'omologia, tale che ogni iperpiano passante per C viene trasformato in sé da σ. In particolare, le omologie si dicono speciali se C è un punto di H e non–speciali altrimenti.*

Si scriva la matrice di un'omologia non–speciale, diversa dall'identità, avente come asse l'iperpiano H di equazione $x_0 = 0$, e si scrivano esplicitamente le relazioni esistenti tra la matrice di tale omologia e le coordinate del suo centro.

Svolgimento. Sia $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ un'applicazione lineare soprastante l'omologia $\sigma : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ed indichiamo con $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_n\}$, la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Poichè H è un iperpiano di punti uniti per σ, ciò significa che tutti i vettori del sottospazio vettoriale $Z = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, corrispondente ad H sono autovettori per ψ, relativi ad uno stesso autovalore non nullo; ed inoltre, essendovi un altro punto unito al di fuori di H (il centro), ciò significa che vi è un autovettore $v = e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \notin Z$ per ψ, relativo ad un autovalore non-nullo diverso dal precedente, in quanto σ è diversa dall'identità. Dunque, poichè ψ è determinata a meno di una costante, possiamo supporre che v sia un autovettore relativo all'autovalore 1 ed indichiamo con $\alpha \neq 1$ l'altro autovalore di ψ. In tal modo la matrice di ψ ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

e dobbiamo esplicitare le relazioni che esistono tra la colonna $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ e le coordinate del vettore v, ovvero la colonna $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Deve quindi aversi

$$e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = v = \psi(v) = e_0 + t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n + \alpha(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n)$$

e quindi $t = (1-\alpha)a$, che è quanto dovevamo verificare. In particolare, considerando lo spazio affine immerso nel modo consueto dentro lo spazio proiettivo, osserviamo che A è la matrice di un'omotetia di ampiezza α ed il cui centro ha coordinate a. □

ESERCIZIO 8. *Si considerino nello spazio euclideo le rette di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

(a) Si scriva la matrice di una rotazione di angolo $\pi/4$ attorno all'asse r.
(b) Si scrivano le coordinate di un vettore parallelo alla retta che si ottiene ruotando s di un angolo di $\pi/4$ attorno all'asse r.

Svolgimento. (a). La retta r passa per l'origine e quindi una rotazione di angolo θ, avente tale retta come asse, è un'affinità con una matrice del tipo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_\theta \end{pmatrix}$ (notazione a blocchi). Per determinare il blocco S_θ, possiamo ragionare come segue: indichiamo con P una matrice ortogonale, avente come prima colonna le coordinate di un vettore parallelo all'asse $r^{(\dagger)}$; allora la matrice S_θ è completamente determinata dalla condizione

$$S_\theta P = P R_\theta, \qquad \text{ove} \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nel nostro caso si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ ovvero } \cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e quindi si ottiene

$$S_{\pi/4} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+\sqrt{6} & \sqrt{6}-\sqrt{3}-3 & -\sqrt{6}+\sqrt{3}-3 \\ \sqrt{6}-\sqrt{3}+3 & 2\sqrt{3}+\sqrt{6} & -\sqrt{6}+\sqrt{3}+3 \\ -\sqrt{6}+\sqrt{3}+3 & -\sqrt{6}+\sqrt{3}-3 & 2\sqrt{3}+\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

(b). Per determinare un tale vettore è sufficiente applicare la trasformazione di matrice S_θ ad un vettore parallelo alla retta s; ad esempio, applicandola al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ottiene il vettore $w' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 9. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 8x^2 - 13y^2 - 28xy - 72x - 24y = 0.$$

Svolgimento. La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -36 & -12 \\ -36 & 8 & -14 \\ -12 & -14 & -13 \end{pmatrix}$$

(†) In particolare, le colonne della matrice P sono una base ortonormale dello spazio vettoriale, avente la direzione dell'asse di rotazione come primo vettore. In particolare, se $\det P = 1$ allora tale base è equiorientata con la base del riferimento originale e si otterrà così la matrice di una rotazione di un angolo (orientato) di $\frac{\pi}{4}$.

ed essendo $\det A = 3600$, $\det A' = -300$, si conclude che $\mathcal{C}$ è un'iperbole (non-degenere). Il suo centro è il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, e la matrice A' ha gli autovalori 15 e -20 a cui corrispondono gli spazi di autovettori $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ e $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. Da quanto sin qui calcolato, si ottiene che gli assi della conica sono le rette $h_1 : x + 2y + 3 = 0$ ed $h_2 : 2x + y - 4 = 0$, ed il primo dei due è l'asse focale; inoltre, l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ è $\frac{5}{4}X^2 - \frac{5}{3}Y^2 = 1$. La distanza dei fuochi dal centro è quindi $\sqrt{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}}$ e lasciamo al lettore il compito di determinare esplicitamente le coordinate dei fuochi. □

ESERCIZIO 10. *Nel piano euclideo, siano P un punto ed r una retta non passante per P. Per ogni scelta di e tra i numeri reali positivi, si mostri che il luogo dei punti X soddisfacenti alla condizione $\|X-P\| = ed(X,r)$ è una conica.*

Si mostri inoltre che, per ogni valore di e, l'asse focale di tale conica è sempre perpendicolare alla retta r e che P è uno dei fuochi della conica.

Svolgimento. Possiamo sempre supporre di aver fissato un sistema di coordinate (ortonormali) nel piano euclideo che abbia il punto P come origine e per il quale la retta r abbia equazione $x = d$, con $d > 0$. Dunque, in tale sistema di coordinate, il luogo dei punti soddisfacenti alla condizione $\|X - P\| = ed(X,r)$ è la curva di equazione $x^2 + y^2 = e^2(x-d)^2$, ovvero la conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} e^2d^2 & -e^2d & 0 \\ -e^2d & e^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si vede così che, per ogni valore di $e > 0$, si tratta di una conica non-degenere ($\det A = e^2d^2$) ed, in particolare, si ha un'ellisse per $0 < e < 1$, una parabola per $e = 1$ ed un'iperbole per $e > 1$ ($\det A' = 1 - e^2$).

Per $e \neq 1$, il centro della conica ha coordinate (affini) $\begin{pmatrix} \frac{e^2d}{e^2-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi, la retta $y = 0$ è un asse della conica, perchè gli assi della conica sono paralleli agli assi coordinati. Inoltre, anche quando la conica è una parabola, l'asse è parallelo alla retta $y = 0$ e quindi, per concludere la discussione è sufficiente verificare che, per ogni valore di $e > 0$, il punto P è un fuoco della conica. Dunque è sufficiente verificare che le tangenti alla conica uscenti da P sono rette isotrope. La polare di P è la retta di equazione affine $x = d$ (cioè la retta r) che interseca la conica nei punti (di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$) di coordinate affini $R_1 = \begin{pmatrix} d \\ id \end{pmatrix}$ ed $R_2 = \begin{pmatrix} d \\ -id \end{pmatrix}$ e si verifica con un calcolo diretto che le polari di tali punti sono rette isotrope. Ciò risponde completamente al quesito posto.

Può essere interessante osservare che in questo modo si può costruire ogni conica non-degenere (a meno di isometria) facendo variare opportunamente i parametri e e d. Osserviamo infatti che ogni parabola (non degenere) si può ottenere ponendo $e = 1$ e facendo variare la distanza d. Inoltre, se $e \neq 1$, i quadrati dei semiassi della conica di matrice A sono

$$\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} \qquad \text{ed} \qquad \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

ed è facile, al variare di e e d, ottenere per tali frazioni qualsiasi coppia di valori non-nulli distinti, il primo positivo ed il secondo di segno arbitrario. Quindi in questo modo possiamo costruire, a meno di isometria, qualsiasi conica con eccentricità $e \neq 0$. Resta aperto il problema di determinare le circonferenze, coniche con eccentricità $e = 0$. Infatti, se si pone $e = 0$ nella definizione iniziale, si ottiene la condizione $\|X - P\| = 0$ e quindi la circonferenza degenere di raggio nullo, centrata in P. Le circonferenze di raggio positivo si possono ottenere solo con un opportuno 'passaggio al limite'. Infatti, fissato un numero reale $k > 0$, possiamo considerare i parametri e e d legati dalla condizione $ed = k$ e far tendere $e \to 0$ sotto questa condizione (in tal modo $d \to \infty$ e quindi la retta r si allontana indefinitamente da P). In questo modo i quadrati dei semiassi tendono entrambi a k^2 e si ottiene così come limite la circonferenza di centro P e raggio k. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)
prova scritta del 17 giugno 1997

ESERCIZIO 1. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Al variare di λ in $\mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo $\phi_\lambda : V \to V$, di matrice*

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 & -\lambda & 2\lambda \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -\lambda - 1 & -\lambda & \lambda + 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data. Indicato con V^* lo spazio vettoriale duale di V, si determinino i valori di λ per cui

$$U_\lambda = \{\, v^* \in V^* \mid v^* \circ \phi_\lambda(v) = 0 \ \forall v \in V \,\}$$

è un sottospazio di dimensione positiva ed, in tal caso, si determini $\dim U_\lambda$.

Svolgimento. Dalla definizione discende che $U_\lambda = (\operatorname{im}\phi_\lambda)^\perp = \ker(\phi_\lambda^*)$, ove $\phi_\lambda^* : V^* \to V^*$ è l'applicazione lineare trasposta di ϕ_λ. Da ciò si deduce che $\dim U_\lambda = 4 - \operatorname{rk} A_\lambda$. Quindi, osservato che $\det A_\lambda = 2(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$, si conclude che, per valori di λ diversi da $-2, 1, 3$, si ha $\dim U_\lambda = 0$. Infine, si osservi che

$$U_{-2} = \langle v_1^* + 2v_2^* - v_3^* \rangle, \quad U_1 = \langle v_1^* + v_3^* + v_4^* \rangle, \quad U_3 = \langle 3v_1^* - 4v_2^* + 7v_3^* + 15v_4^* \rangle;$$

e da ciò si conclude[†]. □

ESERCIZIO 2. *Siano V, W e Z tre spazi vettoriali sul corpo C, di dimensioni n, m e k, rispettivamente.*

(a) Sia data un'applicazione lineare $\psi : W \to Z$, di rango r, e si consideri l'insieme

$$S = \{\, \phi \in Hom_C(V, W) \mid \psi \circ \phi = 0 \,\}.$$

Si mostri che S è un sottospazio di $Hom_C(V, W)$ e se ne calcoli la dimensione.

(b) Si supponga ora $C = \mathbb{R}$ ed $n = 3$, $m = 4$, $k = 2$, e si fissino delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$ degli spazi dati. Nell'ipotesi che ψ abbia matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

si scriva una base di $S \subset M_{4\times 3}(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (a). Si osservi che $\psi \circ \phi = 0$ se, e solo se, $\operatorname{im}\phi \subseteq \ker\psi$. Dunque, possiamo concludere che $S \cong \operatorname{Hom}_C(V, \ker\psi)$, e quindi che $\dim S = n(m - r)$, ovvero il prodotto delle dimensioni di V e di $\ker\psi$.
(b). Nell'esempio dato, $\ker\psi = \langle w_2 + w_3 + w_4, w_1 + 2w_3 \rangle$ e quindi il sottospazio S ha dimensione 6 ed una sua base è costituita dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 2&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&2 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Ciò risponde completamente alla domanda posta. □

[†] Ovviamente, per determinare la dimensione di U_λ per $\lambda = -2, 1, 3$, non era necessario esibire una base di tale sottospazio di V^*, ma era sufficiente calcolare il rango della matrice A_λ.

ESERCIZIO 3. *Sia n un numero intero positivo fissato. Si mostri che il sistema di equazioni algebriche*

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ \dots \\ x_1^n + \cdots + x_n^n = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione in $\mathbb{C}^n$ il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svolgimento. Si osservi che il sistema scritto è equivalente all'uguaglianza di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò significa che il determinante della matrice quadrata deve essere uguale a zero (perchè?) e quindi, per il calcolo del determinante di Vandermonde, deve aversi che due tra le costanti $x_1, \dots, x_n$ coincidono tra loro. Non è restrittivo supporre che sia $x_{n-1} = x_n$.

Dunque, da ciò si deduce che vale anche la condizione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 2x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui si deduce ancora una volta l'annullarsi del determinante della matrice quadrata e quindi che due tra le costanti $x_1, \dots, x_{n-1}$ devono coincidere tra loro.

Si può ancora applicare un ragionamento analogo al precedente, fino a che il problema si riduce alle condizioni $x_1 = \cdots = x_n$ ed $nx_1 = 0$. Ciò permette di concludere. □

ESERCIZIO 4. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(*a*) *Si determini l'indice di inerzia di g.*

(*b*) *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}.$$

Si dica quale tra le seguenti affermazioni è vera e si determini una base soddisfacente alle condizioni ivi descritte.

(b_1) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice A*

(b_2) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice B.*

(b_3) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice C.*

(*c*) *Si determini un sottospazio isotropo massimale.*

Svolgimento. Si osservi che, posto

$$W_+ = \langle e_1, e_3 \rangle \qquad \text{e} \qquad W_- = \langle e_2, e_4 \rangle,$$

si ha una decomposizione del tipo descritto nel Teorema di Sylvester e quindi $i(g) = 0$. Dunque, l'affermazione vera è (b_2), perchè B è l'unica tra le tre matrici a rappresentare un'applicazione bilineare con indice d'inerzia zero.

Una base ortonormale di W_+ è $\{e_1, 2e_1 - e_3\}$, mentre una base di W_- rispetto a cui la restrizione di g ha matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è $\{e_2 + e_4, e_4\}$. Dunque, una base di $\mathbb{R}^4$, rispetto a cui g ha matrice uguale a B è

$$v_1 = e_1 + e_4, \quad v_2 = \tfrac{1}{2}(e_1 - e_4), \quad v_3 = 2e_1 + e_2 - e_3 + e_4, \quad v_4 = \tfrac{1}{2}(2e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

Si conclude quindi che un sottospazio isotropo massimale è $U = \langle e_1 + e_4, 2e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \rangle$. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & -3 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento. Si può verificare che, posto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$, e ciò permette di rispondere alle domande poste, prendendo J come matrice di Jordan e le colonne della matrice P come la base cercata. □

ESERCIZIO 6. *Sia A una matrice quadrata, di ordine n, ad elementi nel corpo C.*

(i) Sia $C = \mathbb{R}$. Si mostri che una matrice simmetrica A è nilpotente se, e solo se, $\mathrm{tr}(A^2) = 0$.
(ii) Sia $C = \mathbb{C}$. Si dia l'esempio di una matrice simmetrica B, non nilpotente, e tale che $\mathrm{tr}(B^2) = 0$.
(iii) Sia $C = \mathbb{C}$. Si mostri che A è nilpotente se, e solo se, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = 0$.

Svolgimento. Ricordiamo che la traccia di una matrice è la somma degli elementi posti sulla diagonale principale e che matrici simili hanno la stessa traccia. Quindi, poichè ogni matrice ammette una forma di Jordan (eventualmente ad elementi nella chiusura algebrica $\bar{C}$ di C), si conclude che la traccia di una matrice è la somma dei suoi autovalori. Ne consegue che, per ogni esponente intero r, la traccia della matrice A^r viene a coincidere con la somma degli autovalori di A, ciascuno elevato alla r-esima potenza.

(i). Una matrice reale simmetrica ha tutti gli autovalori reali, quindi se la somma dei quadrati degli autovalori è nulla, devono essere uguali a zero tutti gli autovalori e perciò A è nilpotente (ed in realtà uguale alla matrice nulla. Perchè?). L'affermazione reciproca è banalmente vera.

(ii). Si può considerare la matrice diagonale (e quindi simmetrica) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

(iii). È sufficiente osservare che, le condizioni date sulla traccia delle potenze della matrice A e quanto affermato nell'*Esercizio 3*, permettono di concludere che tutti gli autovalori di A sono uguali a zero. □

ESERCIZIO 7. *Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(C)$ immerso nel modo usuale nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(C)$ (piano improprio $x_0 = 0$). Sia $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ un'affinità che trasforma ogni piano, π, in un piano parallelo a π. Si mostri che f è un'omologia dello spazio proiettivo e si dica qual è il suo asse. Si scriva la matrice di f sapendo che il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (coordinate affini) è un punto unito per f e che il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ viene mandato in $f(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

Svolgimento. Poichè ogni piano proprio di $\mathbb{A}^3(C)$ viene trasformato in un piano parallelo, si conclude che le rette del piano improprio sono globalmente unite. Ma considerando che ogni punto improprio è la direzione comune di due piani propri incidenti, si vede che, in realtà, tutti i punti del piano improprio sono uniti e quindi che f è un'omologia di $\mathbb{P}^3(C)$ avente il piano improprio, $x_0 = 0$, come asse.

Inoltre, il punto proprio P è unito ed f non è l'applicazione identica, perchè $f(Q) \neq Q$; dunque f è un'omologia speciale, e la sua matrice è quindi del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \alpha & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & \alpha & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

ove α ed il vettore $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$, dipendono dal punto P e dalla coppia $(Q, f(Q))$. In particolare, deve aversi

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $\alpha = -1$ e $t = (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 8. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette r_1 ed r_2, di equazioni*

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si scriva l'equazione del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti equidistanti dalle due rette.

(b) Si verifichi che tutti i piani paralleli a $\pi : x + y + z = 0$ tagliano su $\mathcal{Q}$ coniche affinemente equivalenti (di che tipo?).

Svolgimento. (a). Guardando alla matrice completa del sistema che descrive l'intersezione $r_1 \cap r_2$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si vede che il rango di A è uguale a 4, mentre la matrice incompleta ha rango 3. Ciò significa esattamente che le due rette sono sghembe.

Si osservi inoltre che la retta r_1 passa per il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta r_2 passa per il punto $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque, i punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ equidistanti dalle due rette devono soddisfare alla condizione

$$\frac{\|(X - P_1) \times v_1\|}{\|v_1\|} = \frac{\|(X - P_2) \times v_2\|}{\|v_2\|},$$

che fornisce l'equazione della superficie $\mathcal{Q}$, ovvero

$$\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - 2z^2 - 10xy - 4xz - 4yz + 4x - 8y + 4z + 4 = 0.$$

(b). È chiaro che l'intersezione tra la superficie $\mathcal{Q}$ ed un piano è una conica, visto che $\mathcal{Q}$ è definita da un'equazione di secondo grado. Inoltre, una famiglia di piani paralleli taglia sulla superficie delle coniche affinemente equivalenti (purchè non-degeneri) in quanto tutti i piani in questione condividono la stessa retta impropria e quindi il tipo di conica è determinato dall'intersezione di $\mathcal{Q}$ con tale retta, ovvero dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 10x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_0x_1 - 8x_0x_2 + 4x_0x_3 + 4x_0^2 = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema ha come soluzione il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, con molteplicità 2; quindi tutte le coniche non degeneri tagliate da tale famiglia di piani sono delle parabole. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + 3y^2 + 4xy + 2y - 2 = 0,$$

e se ne determinino il centro, gli assi, i fuochi e l'equazione canonica.

Svolgimento. La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce con un facile calcolo di determinanti che la conica in questione è un'iperbole (non-degenere). Il centro è il punto $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e gli assi sono le rette $h_1 : (1+\sqrt{5})(x+2) - 2(y-1) = 0$ ed $h_2 : (1-\sqrt{5})(x+2) - 2(y-1) = 0$ e la prima delle due è l'asse focale. L'equazione canonica è $(\sqrt{5}+2)x^2 - (\sqrt{5}-2)y^2 = 1$ e, da ultimo, lasciamo al lettore il compito di scrivere esplicitamente le coordinate dei fuochi. □

ESERCIZIO 10. *Sia $\mathcal{C}$ un'iperbole non degenere del piano euclideo e si indichino con r_1, r_2 gli asintoti di $\mathcal{C}$ e con h_1, h_2 i suoi assi. Si mostri che $(r_1, r_2, h_1, h_2) = -1$.*

Nell'ipotesi che l'iperbole $\mathcal{C}$ sia equilatera, si mostri inoltre che, se t_1, t_2 sono due diametri coniugati di $\mathcal{C}$, allora r_1 ed r_2 sono le bisettrici degli angoli tra t_1 e t_2.

Svolgimento. Il birapporto tra le quattro rette coincide con il birapporto tra i quattro punti di intersezione di tali rette con la retta impropria (perchè?). Se si considera l'involuzione indotta dalla conica $\mathcal{C}$ sulla retta impropria, si ha che le intersezioni con gli asintoti sono i punti uniti di tale involuzioni, mentre le intersezioni con gli assi, essendo diametri coniugati, formano una coppia di punti che si corrispondono in tale involuzione. Dunque le due coppie di punti formano un gruppo armonico e l'affermazione sul birapporto è completamente dimostrata.

Poichè si tratta di un'iperbole equilatera, possiamo scegliere un riferimento ortonormale del piano euclideo che abbia l'origine nel centro della conica e gli asintoti come assi. In tale riferimento l'iperbole ha una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

per un'opportuna costante α. Con un calcolo diretto si verifica che l'involuzione indotta dalla conica sulla retta impropria manda il punto $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ sul punto $P'_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ y \end{pmatrix}$, ed è chiaro che queste due direzioni formano angoli (non-orientati) uguali con entrambo gli assi coordinati. $\square$

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 1 luglio 1997

ESERCIZIO 1. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4, sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base, e si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$, di matrice $G = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$, rispetto alla base $\mathcal{V}$.*

Al variare di λ in $\mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo $\phi_\lambda : V \to V$, di matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 & -\lambda & 2\lambda \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -\lambda - 1 & -\lambda & \lambda + 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{V}$. Si indichi con $\phi^*_\lambda : V \to V$, l'endomorfismo definito dalla condizione

$$g(v\,,\,\phi_\lambda(v')) = g(\phi^*_\lambda(v)\,,\,v'), \qquad \text{per ogni } v, v' \in V.$$

(a) Si scrivano esplicitamente le relazioni esistenti tra la matrice A_λ e la matrice B_λ di ϕ^*_λ, rispetto alla base $\mathcal{V}$.

(b) Si determinino inoltre i valori di λ per cui $\ker(\phi^*_\lambda)$ è un sottospazio di dimensione positiva ed, in tal caso, si determini la sua dimensione.

Svolgimento. (a). Indichiamo con $\tilde{\phi}_\lambda : V^* \to V^*$ l'applicazione trasposta di ϕ_λ e sia $\Phi_g : V \to V^*$ l'isomorfismo associato a g. Allora, si ha $\tilde{\phi}_\lambda \circ \Phi_g = \Phi_g \circ \phi^*_\lambda$. Infatti, per ogni $v, w \in V$, si ha

$$\Phi_g(\phi^*_\lambda(v)) \circ w = g(\phi^*_\lambda(v), w) = g(v, \phi_\lambda(w)) = \Phi_g(v) \circ \phi_\lambda(w) = \tilde{\phi}_\lambda(\Phi_g(v)) \circ w.$$

Dunque $\phi^*_\lambda = \Phi_g^{-1} \circ \tilde{\phi}_\lambda \circ \Phi_g$, e quindi, passando alle matrici, si ha

$$B_\lambda = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^*_\lambda) = \alpha_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}(\Phi_g^{-1})\alpha_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}^*}(\tilde{\phi}_\lambda)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}^*}(\Phi_g) = G^{-1t}A_\lambda G = G^t A_\lambda G.$$

(b). Anche in questo caso, si ha $\ker(\phi^*_\lambda) = (\mathrm{im}\,\phi_\lambda)^\perp$ e quindi si tratta di studiare il rango della matrice A_λ, al variare di λ. Si ha $\det A_\lambda = 2(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ e perciò $\dim\ker(\phi^*_\lambda) = 0$ per $\lambda \notin \{-2, 1, 3\}$ e si verifica facilmente che $\dim\ker(\phi^*_\lambda) = 1$ altrimenti. □

ESERCIZIO 2. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo C e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere. Allora, g si dice ellittica se non esistono in V vettori isotropi diversi dal vettore nullo.*

(a) Si mostri che sullo spazio vettoriale $\mathbb{Q}^2$, l'applicazione bilineare di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ è ellittica. Si mostri inoltre che su $\mathbb{C}^2$ non vi sono applicazioni bilineari ellittiche.

(b) Siano (V, g) e (W, h) due spazi vettoriali di dimensione n su C, dotati di applicazioni bilineari ellittiche, e sia $f : V \to W$ un'isometria. Si consideri lo spazio vettoriale $V \oplus W$ con l'applicazione bilineare

$$(v_1 + w_1, v_2 + w_2) \mapsto g(v_1, v_2) - h(w_1, w_2), \qquad \text{per ogni } v_1, v_2 \in V, \quad w_1, w_2 \in W.$$

Si mostri che il grafico di f, ovvero $\Gamma = \{\, v + f(v) \mid v \in V \,\} \subset V \oplus W$, è un sottospazio isotropo di dimensione n di $V \oplus W$.

(c) Nelle notazioni del punto precedente, si mostri che ogni sottospazio isotropo massimale di $V \oplus W$ è il grafico di un'isometria di V in W.

Svolgimento. (a). Le coordinate di un vettore isotropo non-nullo di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$ rispetto all'applicazione bilineare data, soddisfano l'equazione $X^2 - 2Y^2 = 0$. Ciò implicherebbe che 2 dovrebbe essere un quadrato in $\mathbb{Q}$ e ciò è notoriamente falso.

D'altro canto, ogni applicazione bilineare di $\mathbb{C}^2$ ammette vettori isotropi non banali in quanto $\mathbb{C}$ è un corpo algebricamente chiuso e quindi nessuna applicazione bilineare può essere ellittica.

(b). Indichiamo con $\gamma : (V \oplus W) \times (v \oplus W) \to C$ l'applicazione bilineare definita nel testo dell'esercizio. Poichè f è un'applicazione lineare, l'insieme Γ è un sottospazio di $V \oplus W$ ed ha dimensione uguale ad n, perchè la proiezione $v + f(v) \mapsto v$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Infine, per ogni $v_1, v_2 \in V$, si ha $\gamma(v_1 + f(v_1), v_2 + f(v_2)) = g(v_1, v_2) - h(f(v_1), f(v_2))$, che è uguale a zero perchè f è un'isometria.

(c). Sia infine U un sottospazio isotropo, di dimensione n, di $V \oplus W$. Poichè V e W sono entrambo sottospazi ellittici, deve aversi $V \cap U = (0) = w \cap U$. Dunque, la restrizione ad U delle due proiezioni di $V \oplus W$ sugli addendi è in entrambo i casi iniettiva e quindi si tratta di isomorfismi di spazi vettoriali, visto che U, V e W hanno tutti e tre la stessa dimensione. Possiamo quindi concludere che, dato comunque un vettore $v \in V$, esiste un unico vettore $w \in W$ tale che $v + w \in U$ e l'applicazione $\phi : v \mapsto w$ è quindi un'applicazione lineare (invertibile) di V su tutto W. Infine, poichè U è un sottospazio isotropo relativamente a γ, dati $v_1, v_2 \in V$ ed i relativi vettori $v_1 + w_1$ e $v_2 + w_2$ in U, deve aversi

$$0 = \gamma(v_1 + w_1, v_2 + w_2) = g(v_1, v_2) - h(w_1, w_2)$$

e quindi l'applicazione $\phi : V \to V$ definita sopra è un'isometria. □

ESERCIZIO 3. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

Si dica se esistono due sottospazi isotropi $U_1, U_2 \subset V$ tali che l'applicazione $(u_1, u_2) \mapsto g(u_1, u_2)$ sia una dualità. In caso affermativo si determinino due tali sottospazi ed una base $\mathcal{U}_1$ di U_1 e la sua base duale $\mathcal{U}_2$ di U_2.

Svolgimento. Si considerino i sottospazi $W_+ = \langle e_1, e_3 \rangle$ e $W_- = \langle e_2, e_4 \rangle$ e si osservi che la restrizione di g al primo dei due è definita positiva, mentre la restrizione al secondo sottospazio è definita negativa. Si tratta di una decomposizione del tipo descritto nel teorema di Sylvester e quindi $i(g) = 0$ e perciò esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{R}_4$ rispetto a cui g ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque, i sottospazi

$$U_1 = \langle v_1 + v_3, v_2 + v_4 \rangle \qquad \text{e} \qquad U_2 = \langle \tfrac{1}{2}(v_1 - v_3), \tfrac{1}{2}(v_2 - v_4) \rangle$$

sono sottospazi isotropi, posti in dualità da g, e le basi date sono basi tra loro duali. Per concludere, si tratta quindi di determinare una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, del tipo descritto sopra; e ad esempio, basta prendere

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), \quad v_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}e_2 \quad v_4 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2e_2 + 3e_4).$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Sia A una matrice quadrata, di ordine n, ad elementi reali, antisimmetrica e non degenere. Si dimostri che tutti i suoi autovalori sono puramente immaginari.*

Svolgimento. È sufficiente dimostrare che tutti gli autovalori della matrice A^2 sono numeri reali negativi. Si osservi quindi che

$${}^t(A^2) = ({}^tA)({}^tA) = (-A)(-A) = A^2,$$

e quindi A^2 è una matrice simmetrica e quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Inoltre, poichè A è non degenere, tutti gli autovalori di A^2 sono diversi da zero. Sia quindi $\alpha \in \mathbb{R}$ un autovalore di A^2 e sia v un autovettore ad esso relativo. Si osservi che, essendo $A = -{}^tA$, si ha

$$\alpha\, {}^tvv = {}^tvA^2v = ({}^tvA)(Av) = (-{}^tv{}^tA)(Av) = -{}^t(Av)(Av) < 0$$

e quindi $\alpha < 0$, che è quanto volevamo mostrare. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(A - X\mathbf{1}_5) = -X(X+1)^2(X+2)^2$, e considerando che le matrici

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad A + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe rango 4, si possono riassumere queste prime osservazioni su ϕ nella seguente tabella

Autovalori	-2	-1	0
molteplicità	2	2	1
nullità	1	1	1
Autovettori	$\langle e_2 + e_5 \rangle$	$\langle e_1 + e_3 \rangle$	$\langle e_1 + e_3 + e_4 \rangle$

Da ciò si conclude che il polinomio minimo di ϕ coincide con il polinomio caratteristico e che una matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Infine, considerando le matrici

$$(A+2)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

si conclude che una base di $\mathbb{Q}^5$, rispetto a cui ϕ ha matrice J è $\{e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_5, e_5, e_1 + e_3, e_3 + 2e_4\}$. □

ESERCIZIO 6. *Nello spazio euclideo (n-dimensionale) siano dati un punto P ed un vettore $v \neq 0$, e si consideri l'applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, definita ponendo*

$$f(X) = X - \frac{2g(v, X-P)}{g(v,v)}v, \qquad \textit{per ogni } X \in \mathbb{A},$$

ove g indica l'applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva, che determina la metrica euclidea.

(a) Si mostri che f è un'isometria.

(b) Si mostri che l'insieme $H = \{ X \in \mathbb{A} \,|\, f(X) = X \}$ è un iperpiano e si determinino un suo punto ed il suo spazio direttore.

(c) Si scriva la matrice dell'applicazione $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, definita sopra, nel caso in cui $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svolgimento. (a). Determiniamo l'applicazione lineare $\phi : V \to V$ associata all'affinità f e mostriamo che si tratta di un'isometria relativamente a g. Per ogni vettore $w \in V$, si ha

$$f(P + w) = P + w - \frac{2g(v, w)}{g(v, v)} v$$

e quindi l'applicazione lineare associata ad f è $\phi(w) = w - \frac{2g(v,w)}{g(v,v)} v$, al variare di $w \in V$. Inoltre, si ha

$$g(\phi(w), \phi(w')) = g(w, w') - \frac{2g(v, w)}{g(v, v)} g(w', v) - \frac{2g(v, w')}{g(v, v)} g(v, w) + \frac{4g(v, w)g(v, w')}{g(v, v)^2} g(v, v) = g(w, w');$$

e dunque f è un'isometria dello spazio affine.

(b). Si osservi che $f(X) = X$ se, e solo se, $g(v, X - P) = 0$, e quindi se, e solo se, $X \in P + \langle v \rangle^\perp$. Dunque, il luogo H dei punti uniti rispetto ad f è l'iperpiano perpendicolare a v, passante per P. In particolare, osserviamo che f è la simmetria di asse H.

(c). Infine, calcolando le imagini dell'origine e dei vettori fondamentali del riferimento, si ottiene che la matrice dell'affinità f è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così risposto a tutte le domande poste. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto P e la retta r, ove*

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \textit{ed} \qquad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si scriva l'equazione del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti che hanno uguale distanza dal punto P e dalla retta r.

(b) Si determini la retta s, passante per P, perpendicolare ad r ed incidente quest'ultima.

(c) Si classifichino dal punto di vista affine, le coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con i piani del fascio di asse s.

Svolgimento. (a). La retta r passa per il punto $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; dunque un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{Q}$ se, e solo se,

$$\|X - P\| = \frac{\|(X - P_0) \times v\|}{\|v\|};$$

ovvero $\mathcal{Q}$ è l'ipersuperficie (quadrica) di equazione

$$\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - 2xy - 8x + 4z + 10 = 0.$$

(b). La retta s è l'intersezione tra il piano π, perpendicolare ad r e passante per P, ed il piano σ, contenente r e passante anch'esso per P. Si ha quindi

$$\pi : x - y = 2 \qquad \text{e} \qquad \sigma : x + y + 2z = 0,$$

da cui si ottiene che

$$s : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

e quindi la retta s passa per P ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c). Le coniche in questione sono determinate dal punto di vista affine dalla loro intersezione con la retta impropria del piano in cui sono contenute, ovvero dalla loro intersezione con il piano improprio, di equazione $x_0 = 0$. Dunque, si tratta di studiare le soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \lambda(x_1 - x_2 - 2x_0) + \mu(x_1 + x_3) = 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{al variare di } (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Per $\mu \neq 0$, si tratta del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, con molteplicità 2, e quindi le coniche non-degeneri di questa famiglia sono parabole. Quando $\mu = 0$, si ottiene la retta impropria del piano $x_1 - x_2 - 2x_0 = 0$ con molteplicità 2, e si tratta quindi di una conica degenere. □

ESERCIZIO 8. *Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ una proiettività non identica e tale che $f^2 = 1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$.*

(a) Si dimostri che f ha esattamente due punti uniti ed è completamente determinata dalla conoscenza di tali punti.

(b) Si determini una matrice di f (rispetto al riferimento standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) nell'ipotesi in cui i punti uniti siano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento. Se $\phi : \mathbb{C}^2 \to C^2$ è una soprastante di f, allora esiste una costante $c \neq 0$, tale che $\phi^2 = c\mathbf{1}_{\mathbb{C}^2}$. Dunque, il polinomio minimo di ϕ divide $X^2 - c$ e, poichè f non è la proiettività identica, ciò significa che il polinomio minimo di ϕ è $X^2 - c$. Per motivi di dimensione $X^2 - C$ è anche il polinomio caratteristico di ϕ e quindi, indicata con $\gamma \in \mathbb{C}$ una radice quadrata di c, si conclude che esiste una base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{C}^2$ rispetto a cui ϕ ha matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{smallmatrix}\right)$. Dunque, $\sigma\langle v_1\rangle$ e $\sigma\langle v_2\rangle$ sono gli unici punti uniti di f ed, in particolare, la matrice di f rispetto ad una base di autovettori (qualsiasi sia il punto unità) differisce da B per la moltiplicazione per una costante.

(b). Dalle condizioni

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si deduce con un calcolo diretto che una matrice di f può essere presa della forma $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{smallmatrix}\right)$. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + 4xy - 4x + 2y - 2 = 0,$$

e se ne determinino il centro, gli assi, i fuochi e l'equazione canonica.

Svolgimento. La matrice della conica $\mathcal{C}$ è uguale ad

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A = -1$ e $\det A' = -4$, e quindi $\mathcal{C}$ è un'iperbole non-degenere di centro $C = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ ed i cui assi hanno direzioni corrispondenti agli autovettori della matrice A'. Gli autovalori di A' sono $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ ed $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ a cui corrispondono gli autovettori $H_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{17}-1 \end{pmatrix}$ ed $H_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{17}-1 \end{pmatrix}$. In particolare, poichè il coefficiente $\lambda = -\frac{\det A'}{\det A} = -4$ è negativo, l'asse focale ha la direzione di H_1. L'equazione canonica di $\mathcal{C}$ è uguale a $2(\sqrt{17}-1)X^2 - 2(\sqrt{17}+1)Y^2 = 1$ e la distanza dei fuochi dal centro è uguale a $\frac{\sqrt[4]{17}}{4}$; infine i fuochi sono i punti $F_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 4\alpha \\ \frac{5}{4} - (\sqrt{17}+1)\alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha^2 = \frac{1}{32(\sqrt{17}+1)}$. □

ESERCIZIO 10. *Sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche del piano affine standard, generato dalle coniche*

$$\mathcal{C} : 2x(y-1) + 1 = 0 \qquad e \qquad \mathcal{D} : 4y - x^2 = 0.$$

Si mostri che i centri delle coniche (a centro) del fascio $\mathcal{F}$ sono contenuti nel supporto di una conica del piano affine e si scriva esplicitamente l'equazione di tale conica.

Svolgimento. La generica conica del fascio $\mathcal{F}$ ha matrice

$$A_{(\lambda,\mu)} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 2\mu \\ -\lambda & -\mu & \lambda \\ 2\mu & \lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

e quindi le coniche del fascio sono coniche a centro se sono non-degeneri ed inoltre $\lambda \neq 0$. In tal caso, le coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del centro sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -\mu x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x = -2\mu \end{cases} \qquad \text{ovvero deve aversi} \qquad \begin{cases} x = -2\frac{\mu}{\lambda} \\ y = \frac{\lambda^2 - 2\mu^2}{\lambda^2} \end{cases}.$$

da ciò si deduce che i punti in questione soddisfano all'equazione $2y = 2 - x^2$ e quindi sono tutti contenuti nel supporto di questa parabola. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 11 settembre 1997

ESERCIZIO 1. *Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che l'insieme delle matrici $X \in M_2(\mathbb{Q})$ tali che $AX = XA$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{Q})$, la cui dimensione è uguale a 2 oppure a 4, e quest'ultimo caso accade se, e solo se, A è una matrice scalare ($a = d$ e $b = c = 0$).*

Svolgimento. Si indichi con C_A l'insieme delle matrici che commutano con A, ovvero

$$C_A = \{\, X \in M_2(\mathbb{Q}) \mid AX = XA \,\} .$$

È possibile verificare con un calcolo diretto che, se X ed Y sono in C_A ed α, β sono costanti, allora $\alpha X + \beta Y$ appartiene ancora a C_A e quindi tale insieme è un sottospazio vettoriale(*) di $M_2(\mathbb{Q})$.

Per verificare l'asserto sulla dimensione del sottospazio C_A, osserviamo che, posto $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, si ha che $X \in C_A$ se, e solo se, le sue entrate sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} bu = cy \\ ay + bv = bx + dy \\ cx + du = au + cv \end{cases} .$$

Da ciò si deduce di nuovo che l'insieme C_A è un sottospazio e che la sua dimensione è uguale

$$4 - \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & c & -b & 0 \\ b & d-a & 0 & -b \\ c & 0 & d-a & -c \end{pmatrix} .$$

Infine, il rango della matrice scritta sopra è esattamente uguale a 2 se $a \neq d$, oppure uno almeno tra b e c è diverso da zero; altrimenti, se $a = d$ e $b = c = 0$, il rango è uguale a zero. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio proiettivo tridimensionale, $\mathbb{P}^3(C)$, si fissino un punto P, una retta r ed un piano π che si appartengono (cioè $P \leq r \leq \pi$). Si mostri che le applicazioni proiettive $f : \mathbb{P}^3(C) \to \mathbb{P}^3(C)$, soddisfacenti alle condizioni $f(P) \leq P$, $f(r) \leq r$, $f(\pi) \leq \pi$, formano uno spazio proiettivo e si calcoli la dimensione di tale spazio. In particolare, si mostri che le proiettività di $\mathbb{P}^3(C)$, soddisfacenti alle condizioni dette, sono i punti del complementare dell'unione di quattro iperpiani di tale spazio.*

Svolgimento. Si fissi una base $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_3\}$ di C^4 tale che $P = \sigma\langle v_0 \rangle$, $r = \sigma\langle v_0, v_1 \rangle$ e $\pi = \sigma\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$. Allora, le applicazioni proiettive soddisfacenti alle condizioni del testo hanno applicazioni lineari soprastanti che, rispetto alla base fissata, hanno matrice triangolare superiore(*). Le matrici di questo tipo formano un sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le matrici quadrate di ordine 4 e la dimensione di tale sottospazio è uguale a 10. Un'applicazione proiettiva determina la sua soprastante lineare a meno della moltiplicazione per una costante non-nulla, e quindi le applicazioni proiettive soddisfacenti alle condizioni dette sono uno spazio proiettivo di dimensione 9 ed le entrate non-nulle delle loro matrici formano un sistema di coordinate omogenee su tale spazio. Infine osserviamo che un'applicazione proiettiva è una proiettività se, e solo se, la sua soprastante è un'applicazione lineare invertibile e quindi se, e solo se, quest'ultima ha il determinante diverso da zero. Per una matrice triangolare superiore ciò accade se, e solo se, gli elementi sulla diagonale principale sono tutti e quattro diversi da zero. È immediato osservare infine, che l'annullarsi di una delle

(*) Osserviamo che, per qualsiasi matrice quadrata B, di ordine n, ad elementi in un campo C, l'insieme C_B delle matrici che commutano con essa è un sottospazio vettoriale ed anzi un *sottoanello* di $M_n(C)$; ovvero anche il prodotto di due matrici in C_B appartiene ancora a C_B.

(*) Ovvero, se $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq 3}$ è una tale matrice, si ha $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

entrate della diagonale principale della matrice determina un'iperpiano dello spazio proiettivo in questione, in quanto si tratta dell'annullarsi di una delle coordinate omogenee di tale spazio. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale complesso d dimensione n, dotato di una forma hermitiana $h : V \times V \to \mathbb{C}$ non-degenere. Indicato con $i(h)$ l'indice di inerzia di tale forma*[(*)]*, si mostri che la massima dimensione di un sottospazio isotropo di V è uguale al più piccolo tra i due numeri interi $r = \frac{n+i(h)}{2}$ ed $s = \frac{n-i(h)}{2}$.*

Si determinino $i(h)$ e la dimensione di un sottospazio isotropo massimale nel caso in cui $V = \mathbb{C}^4$, ed h è la forma hermitiana di matrice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & 1-i \\ -i & -1 & 0 & 2i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 2i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che per le forme hermitiane vale un risultato analogo al Teorema di Sylvester e quindi lo spazio vettoriale V si decompone nella somma $V = W_+ \oplus W_-$, ove la restrizione di h a W_+ (risp. W_-) è definita positiva (risp. definita negativa) ed i due spazi sono mutuamente ortogonali ($W_+ = W_-^\perp$). Dalla definizione dell'indice di inerzia discende che, per una tale decomposizione, si ha

$$r = \frac{n+i(h)}{2} = \dim W_+ \qquad \text{ed} \qquad s = \frac{n-i(h)}{2} = \dim W_-.$$

Supponiamo che sia $r \leq s$. Fissate una base ortonormale $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_r\}$ di W_+ ed una base ortogonale $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_s\}$ di W_+, tale che $h(z_j, z_j) = -1$ per $j = 1, \dots, s$, si ottiene un sottospazio isotropo di V di dimensione r, considerando il sottospazio $U = \langle w_1 + z_1, \dots, w_r + z_r \rangle$. D'altra parte, per ogni sottospazio isotropo U', deve aversi $U' \cap W_- = (0)$, perchè la restrizione di h a W_- è definita. Quindi si ha $\dim U' \leq n - s = r$ e ciò permette di concludere. Se si ha invece $s \leq r$, si ragiona in modo analogo, invertendo i ruoli di W_+ e W_-.

Essendo $\det H = 5$, si ha che la forma hermitiana è non degenere e si possono quindi applicare i risultati del numero precedente. Dopo aver osservato che i vettori e_3 ed $e_2 + e_4$ generano un sottospazio isotropo di dimensione 2, e quindi massimale, si conclude che $r = s = 2$ e quindi $i(h) = 0$. □

ESERCIZIO 4. *Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con B_n la matrice quadrata di ordine n del tipo*

$$B_n = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 4 & 5 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 5 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 4 & 5 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si scriva in modo esplicito $\beta_n := \det B_n$ quale funzione della variabile n.

Svolgimento. Applicando la Regola di Laplace, si vede che gli interi β_n soddisfano alla relazione ricorsiva $\beta_n = 5\beta_{n-1} - 4\beta_{n-2}$, che può essere scritta nella forma:

$$\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(*) Cf. la *Proposizione 4.6.10* del testo

Posto quindi $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, si conclude che $\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$. Perciò il problema si riduce al calcolo dei due termini iniziali della successione: $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 21$ ed alla determinazione esplicita delle potenze della matrice A. Si osservi che $A = P\Delta P^{-1}$, ove

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da ciò si deduce che

$$\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n - 1 \\ 4^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

e quindi, in conclusione $\beta_n = \dfrac{4^{n+1} - 1}{3}$. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ sono, rispettivamente, $p_\phi(X) = (X + 1)^2(X - 2)^3$ e $\lambda_\phi(X) = (X + 1)^2(X - 2)^2$. La matrice di Jordan di ϕ è quindi

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

e inoltre, considerando i vettori di una base rispetto a cui ϕ ha matrice J, si può concludere che la matrice P cercata è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. *Siano v e w due vettori linearmente indipendenti del piano euclideo, e si consideri l'insieme $\Lambda = \{\, nv + mw \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \,\}$.*

(a) Dati due vettori $v' = av + bw$ e $w' = cv + dw$ di Λ, si mostri che

$$\{\, nv' + mw' \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \,\} = \Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \pm 1.$$

(b) Due punti P, P' del piano euclideo sono equivalenti, e scriveremo $P \cong_\Lambda P'$, se, e solo se, $P - P' \in \Lambda$. Indicheremo con $\overline{X}$ la classe di equivalenza del punto X del piano e con $T = T_\Lambda$ l'insieme delle classi

di equivalenza, rispetto a questa relazione. Fissato comunque un punto P del piano, si mostri che ogni elemento di T ha uno, ed un solo, rappresentante nell'insieme

$$\Delta_P = \{\, P + (\alpha v + \beta w) \mid \alpha, \beta \in [0,1) \,\} .$$

(c) Date comunque due classi $\overline{P}$ ed $\overline{Q}$ in T, si definisce una funzione $\delta : T \times T \to \mathbb{R}$, ponendo

$$\delta(\overline{P}, \overline{Q}) := \min \{\, \delta_0(P', Q') \mid P' \in \overline{P}, Q' \in \overline{Q} \,\} ,$$

ove δ_0 indica l'usuale metrica euclidea del piano. Si mostri che δ è ben definita e che soddisfa alle proprietà di una funzione "distanza", ovvero: $\delta(\overline{P},\overline{Q}) = \delta(\overline{Q},\overline{P})$, $\delta(\overline{P},\overline{Q}) = 0 \Leftrightarrow \overline{P} = \overline{Q}$, e $\delta(\overline{P},\overline{R}) \leq \delta(\overline{P},\overline{Q}) + \delta(\overline{Q},\overline{R})$, qualunque siano i punti P, Q ed R del piano.

Svolgimento. (a). Affinchè si abbia $\{\, nv' + mw' \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \,\} = \Lambda$, deve essere possibile scrivere v e w come combinazioni lineari, a coefficienti in $\mathbb{Z}$, di v' e w'. Ciò significa precisamente che la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha un'inversa in $M_2(\mathbb{Z})$ e quindi che $\det A$ è un elemento invertibile in $\mathbb{Z}$.
(b). Dato un punto Q del piano, si ha $Q - P = av + bw$, per opportuni numeri reali a e b. Presi i più grandi numeri interi m ed n, tali che $m \leq a$ ed $n \leq b^{(*)}$, si ha che il punto $Q' = P + (a-m)v + (b-n)w$ appartiene a Δ_P e $Q - Q' \in \Lambda$. Quindi è vero che ogni punto Q del piano è equivalente ad un elemento di Δ_P. D'altro canto, la differenza di due elementi di Δ_P non può essere un vettore di Λ e ciò permette di concludere per quanto riguarda l'unicità. Osserviamo a margine che Λ è detto un *reticolo* nel piano e l'insieme Δ_P, che è un parallelogramma di lati v e w, è detto un *dominio fondamentale* del reticolo Λ.
(c). Dati $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ in T, si fissi un rappresentante P di $\overline{P}$ e si consideri un dominio fondamentale Δ del reticolo Λ che abbia P nel centro (ovvero $\Delta = \{\, P + (\alpha v + \beta w) \mid \alpha, \beta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \,\}$). Allora, vi è un rappresentante Q di $\overline{Q}$ in Δ, ed è facile verificare che la distanza tra P e Q è la minima possibile. Quindi la distanza δ è ben definita ed è facile dimostrare che valgono le proprietà della funzione distanza; in particolare, la disuguaglianza triangolare si può dimostrare scegliendo opportunamente un dominio fondamentale contenente i rappresentanti dei tre punti aventi le minime distanze e riducendosi così all'analoga proprietà della metrica euclidea. □

ESERCIZIO 7. *Nella retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, si considerino le due coppie di punti (A,B) ed (A',B'), ove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino, se esistono, le coppie di punti (X,Y) di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ per cui si abbia

$$(A,B,X,Y) = -1 = (A',B',X,Y).$$

Svolgimento. È noto che dati quattro punti della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, a due a due distinti, il loro birapporto si esprime in funzione delle coordinate nella forma$^{(\dagger)}$

$$(A,B,X,Y) = \frac{(y_0 b_1 - y_1 b_0)(a_0 x_1 - a_1 x_0)}{(a_0 y_1 - a_1 y_0)(x_0 b_1 - x_1 b_0)}.$$

Dunque, la condizione posta, si trasforma in un sistema di due equazioni, entrambo di secondo grado, nelle coordinate omogenee dei punti X ed Y, ovvero

$$\begin{cases} (2y_0 - y_1)x_1 + y_1(2x_0 - x_1) = 0 \\ y_0(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x_1 y_0 + (x_0 - x_1)y_1 = 0 \\ (x_1 - 2x_0)y_0 + x_0 y_1 = 0 \end{cases}.$$

$^{(*)}$ Usualmente, si scrive $m = [a]$ ed $n = [b]$, e si dice che m (risp. n) è la *parte intera* del numero reale a (risp. b).

$^{(\dagger)}$ Si veda ad esempio l'*Esercizio 7* del Compito del 4 settembre 1995.

Considerato nelle sole incognite (y_0, y_1), si tratta di un sistema lineare omogeneo che ha una soluzione non-banale se, e solo se,

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_0 - x_1 \\ x_1 - 2x_0 & x_0 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_0x_1 + 2x_0^2 = 0.$$

Risolvendo quest'ultima equazione omogenea ed andando a sostituire nel sistema lineare, si trova che l'unica coppia che soddisfa le condizioni poste è, a meno dell'ordine, la coppia (X, Y), con $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ ed $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 8. *Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i quattro punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si determini una retta r ed una metrica euclidea sul piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r$, tali che i quattro punti siano i vertici di un quadrato.

Svolgimento. È necessario che il quadrilatero di vertici $P_1, \dots, P_4$ sia un parallelogramma del piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r$ e quindi la retta r deve contenere i punti di incontro delle due coppie di lati opposti; ovvero

$$r = [(P_1 + P_2) \cap (P_3 + P_4)] + [(P_1 + P4) \cap (P_2 + P_3)].$$

Si tratta quindi della retta che passa per i punti $P_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P'_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $r : x_1 = 0$.

Inoltre, un parallelogramma è un quadrato se i lati consecutivi e le diagonali sono perpendicolari. Ciò significa che devono corrispondersi nell'involuzione degli angoli retti le coppie (P_∞, P'_∞) e (Q_∞, Q'_∞), ove $Q_\infty = (P_1 + P_3) \cap r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q'_\infty = (P_2 + P_4) \cap r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Una coppia di punti della retta che separi armonicamente entrambo le coppie è stata determinata nell'esercizio precedente ed è $X_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$ ed $Y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$ e quindi i due punti ciclici di questa metrica hanno equazioni $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2^2 - 2x_0x_2 + 2x_0^2 = 0 \end{cases}$.

Ciò significa che nelle coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ su r, la metrica ha matrice $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, che è la matrice di un'applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva(*). □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 2x + y - 1 = 0,$$

e se ne determinino il centro, gli assi, i fuochi e l'equazione canonica.

(*) Naturalmente, si poteva determinare H (a meno di una costante, perchè non si è fissata un'unità di misura), prendendo le sue entrate come incognite e imponendo l'ortogonalità delle coppie di punti (P_∞, P'_∞) e (Q_∞, Q'_∞), ottenendo così due equazioni lineari omogenee nelle tre entrate indipendenti della matrice simmetrica H. Il lettore è invitato a verificare il calcolo, che poteva quindi essere usato anche per risolvere l'esercizio precedente.

Svolgimento. La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

e con un calcolo di determinanti, si verifica che $\mathcal{C}$ è un'iperbole (non-degenere). Il centro è il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e gli assi hanno equazioni $h_1 : 3x - y + 1 = 0$ ed $h_2 : x + 3y - 1$. Gli asintoti sono le rette di equazioni $a_1 : x - 2y + 1 = 0$ e $a_2 : 2x + y = 0$ e quindi si tratta di un'iperbole equilatera. Gli autovalori della sottomatrice $A' = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ sono $c_1 = 5$ e $c_2 = -5$, e quindi, ricordando che $\frac{\det A'}{\det A} = \frac{1}{2}$, si conclude che l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ (in un opportuno sistema di riferimento) è $2X^2 - 2Y^2 = 5$. Lasciamo al lettore il compito di determinare le coordinate dei fuochi. □

ESERCIZIO 10. *Nel piano euclideo si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$, di centro l'origine O e raggio 2. Si determini, se esiste, una parabola non degenere, tangente alla circonferenza nei punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta $r : y = x - 1$. In caso affermativo, si calcoli la distanza tra il centro O di $\mathcal{C}$ ed il vertice della parabola.*

Svolgimento. Si tratta di verificare se esiste una parabola non degenere nel fascio determinato da $\mathcal{C}$ e dalla retta r con molteplicità 2, ovvero nel fascio di coniche di equazioni $\lambda(x^2 + y^2 - 4) + \mu(y - x + 1)^2 = 0$, al variare dei parametri omogenei (λ, μ). La generica conica di tale fascio ha matrice

$$A_{(\lambda,\mu)} = \begin{pmatrix} \mu - 4\lambda & -\mu & \mu \\ -\mu & \mu + \lambda & -\mu \\ \mu & -\mu & \mu + \lambda \end{pmatrix}$$

e quindi si ha una parabola (eventualmente degenere) se, e solo se, $\det \left(\begin{smallmatrix} \mu+\lambda & -\mu \\ -\mu & \mu+\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda(2\mu + \lambda) = 0$. Si conclude che l'unica parabola non-degenere tangente alla circonferenza nei punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta $r : y = x - 1$ è la conica di matrice

$$A_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La direzione dell'asse di tale parabola è il punto $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ della retta impropria e quindi l'asse è la polare del punto $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che rappresenta la direzione perpendicolare; ovvero l'asse è la retta $h : x + y = 0$. Il punto proprio di intersezione tra l'asse e la parabola è quindi il vertice che ha coordinate $V = \begin{pmatrix} 9/4 \\ -9/4 \end{pmatrix}$ e quindi la sua distanza dall'origine è uguale a $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 30 settembre 1997

ESERCIZIO 1. *Si consideri l'endomorfismo $\psi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ tali che $\psi \circ \phi = 0$.

Svolgimento. Si tratta delle applicazioni lineari la cui immagine è contenuta in $\ker \psi$, che è il sottospazio di $\mathbb{Q}^3$ generato da $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi le matrici cercate sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix},$$

al variare di a e b in $\mathbb{Q}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$, dotato dell'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Dato un endomorfismo $\phi : V \to V$ si consideri l'endomorfismo $\tilde{\phi} : V \to V$, definito dalla condizione $g(v, \tilde{\phi}(w)) = g(\phi(v), w)$ per ogni $v, w \in V$.

(a) Indicata con A la matrice di ϕ, rispetto alla base canonica, si scriva la matrice B dell'applicazione $\tilde{\phi}$, rispetto alla stessa base.

(b) Si determinino le matrici di tutti gli endomorfismi $\phi : V \to V$ tali che $\tilde{\phi} = \phi$.

Svolgimento. (a). Indicato con $\Phi_g : V \to V^*$ l'isomorfismo associato a g dalla condizione $\Phi_g(v) \circ x = g(x, v)$, possiamo facilmente determinare la relazione tra $\tilde{\phi}$ e la trasposta $\phi^* : V^* \to V^*$. Infatti, per ogni coppia di vettori, v ed x, si ha

$$\Phi_g(\tilde{\phi}(x)) \circ v = g(v, \tilde{\phi}(x)) = g(\phi(v), x) = \Phi_g(x) \circ \phi(v) = \phi^*(\Phi_g(x)) \circ v$$

e quindi, deve aversi $\Phi_g \tilde{\phi} = \phi^* \Phi_g$ e quindi, passando alle matrici associate, si ha $B = G^{-1t}AG$.

(b). In base ad i calcoli fatti nel punto precedente, per un qualunque endomorfismo ϕ, le matrici di ϕ e $\tilde{\phi}$ sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & g & d \\ c & i & f \\ b & h & e \end{pmatrix}.$$

e quindi le matrici cercate sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ b & f & d \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{C}^4$ si consideri la forma hermitiana h, di matrice*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 & i \\ 1+i & 0 & -i & -2 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ -i & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Si verifichi che h è non-degenere e si determini una base ortogonale di V. Si deducano, infine, l'indice di inerzia di h e la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di V.

Svolgimento. La forma hermitiana h è non degenere essendo $\det H = -2$. Si osservi che i vettori $v_1 = e_3$ e $v_2 = e_4$ sono non-isotropi ed ortogonali tra loro; possiamo prenderli quindi come i primi due elementi di una base ortogonale. Un vettore $x_1e_1 + \cdots + x_4e_4$ appartiene a $\langle v_1, v_2\rangle^\perp$ se, e solo se, le sue coordinate sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ix_2 + x_3 = 0 \\ ix_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

e quindi possiamo prendere come ulteriore elemento di una base ortogonale il vettore $v_3 = 3e_1 + ie_4$, e si ha $h(v_3, v_3) = 12$. Infine, un generatore del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle^\perp$ è il vettore $v_4 = (3+5i)e_1 - 4e_2 + 4ie_3 + (1+i)e_4$ e si ha $h(v_4, v_4) = -40$. Dunque, rispetto alla base ortogonale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, la forma h ha matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix},$$

e quindi $i(h) = -2$ e perciò un sottospazio isotropo massimale di V ha dimensione 1. Tali sottospazi sono, ad esempio $\langle 2v_2 + v_3\rangle$, oppure $\langle e_2\rangle$. □

ESERCIZIO 4. *Sia $P \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice con tutte le entrate positive.*

(a) Si mostri che P ha due autovalori reali distinti.

(b) Sia λ_1 l'autovalore maggiore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $x_1x_2 > 0$.

(c) Sia λ_2 l'autovalore minore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $y_1y_2 < 0$.

Svolgimento. (a). Sia $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ il cui polinomio caratteristico è $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$, che ha il discriminante uguale a $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc > 0$, perchè P ha tutte le entrate positive. Dunque P ha i due autovalori reali distinti

$$\lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

(b). Con un calcolo diretto, si verifica che un autovettore relativo all'autovalore λ_1 è $v_1 = \begin{pmatrix} 2b \\ \sqrt{\Delta} - (a-d) \end{pmatrix}$, le cui componenti sono entrambe positive, essendo $\Delta > (a-d)^2$. È quindi soddisfatta la condizione dell'enunciato.

(c). Con un calcolo diretto, si verifica che un autovettore relativo all'autovalore λ_2 è $v_1 = \begin{pmatrix} -2b \\ \sqrt{\Delta} + (a-d) \end{pmatrix}$, le cui componenti sono di segno opposto, ed è quindi soddisfatta la condizione dell'enunciato. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = x^3(1-x)(x+3)$, il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = x^2(x-1)(x+3)$ ed una matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le colonne della matrice P sono le coordinate dei vettori che formano una base rispetto a cui ϕ abbia matrice J, ovvero

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che si verifica facilmente, soddisfare alla condizione $PJ = AP$. □

ESERCIZIO 6. *Sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}$ la matrice (a blocchi) di una rotazione di angolo ϑ attorno ad un asse r dello spazio euclideo tridimensionale E^3.*

(a) Si determinino gli autovalori di A (in $\mathbb{C}$).
(b) Si dimostri che $\cos\vartheta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$.

Svolgimento. (a). Esiste in E^3 un riferimento ortonormale che ha la stessa origine ed il terzo asse coordinato parallelo ad r; quindi, essendo la matrice di una rotazione di angolo ϑ, A è simile alla matrice

$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$, $\cos\vartheta - i\sin\vartheta$ ed 1.
(b). Poichè matrici simili hanno la stessa traccia, si ha

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}R_\vartheta = 2\cos\vartheta + 1,$$

da cui si deduce la tesi. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} y - 2x = 1 \\ z - y = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2x \end{cases}.$$

(a) Si mostri che le due rette sono sghembe e si scriva l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti dello spazio equidistanti da r ed s.

(b) Si verifichi che le intersezioni tra $\mathcal{Q}$ ed i piani paralleli ad entrambo le rette r ed s sono coniche tra loro affinemente equivalenti (quando non degeneri) e si dica di quale tipo di coniche si tratti.

Svolgimento. (a). La matrice completa del sistema formato dalle equazioni delle due rette ha rango 4 e quindi le due rette sono sghembe. La retta r passa per il punto P ed è parallela al vettore v, mentre la retta s passa per il punto Q ed è parallela al vettore w, ove

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

quindi un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è equidistante da r ed s se, e solo se, $\frac{\|(X-P)\times v\|}{\|v\|} = \frac{\|(X-Q)\times w\|}{\|w\|}$ e quindi, si ha

$$\mathcal{Q} : x^2 - 5y^2 + 4z^2 - 14xy + 4xz - 28yz + 16x - 4y - 4z + 4 = 0.$$

(b). I piani paralleli ad entrambo le rette r ed s sono tutti ortogonali al vettore $v \times w = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, e quindi dobbiamo studiare le coniche di equazioni

$$\mathcal{Q} \cap \pi_k : \begin{cases} x^2 - 5y^2 + 4z^2 - 14xy + 4xz - 28yz + 16x - 4y - 4z + 4 = 0 \\ 2x - z = k \end{cases},$$

al variare del parametro k. Quando tali coniche sono non-degeneri, la loro classificazione affine è determinata dall'intersezione tra tale conica e la retta impropria del piano in cui tale retta giace. Poichè i piani sono tutti paralleli tra loro hanno tutti la stessa retta impropria, ovvero, la retta di equazioni omogenee

$$r_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi le coniche sono tra loro affinemente equivalenti. Poichè

$$\mathcal{Q} \cap r_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 5x_1^2 - 14x_1x_2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

che sono due punti reali distinti di r_∞, tutte le coniche (non degeneri) $\mathcal{Q} \cap \pi_k$, al variare di k, sono delle iperboli. □

ESERCIZIO 8. *Siano r ed s due rette del piano euclideo, passanti per uno stesso punto P, e sia $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angolo tra le due rette. Indicate con j e $\overline{j}$ le due rette isotrope per P, si mostri che si ha*

$$\frac{1}{2i}\log(j, \overline{j}, r, s) = \pm\vartheta \qquad \textit{[Teorema di Laguerre]}$$

ove log *indica la determinazione del logaritmo complesso con parte immaginaria a valori in* $[-\pi, \pi]$.

Svolgimento. Il birapporto tra le quattro rette è uguale al birapporto tra i punti impropri delle stesse rette. Inoltre, possiamo supporre di aver scelto un riferimento ortonormale del piano euclideo che abbia come primo asse la retta r e quindi si tratta di calcolare il birapporto tra i quattro punti

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$(j,\bar{j},r,s) = (C,\overline{C},R,S) = \frac{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{\cos\vartheta - i\sin\vartheta} = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2;$$

da cui si deduce la relazione richiesta(*). □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 3x^2 + 3y^2 - 6xy - 4x + 1 = 0,$$

e se ne determinino gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice ed equazione canonica.

Svolgimento. La matrice di $\mathcal{C}$ è uguale ad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

che, con un calcolo di determinanti, si verifica essere una parabola (non-degenere). L'asse è la retta $3x-3y = 1$ ed il vertice è il punto $V = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'equazione canonica di $\mathcal{C}$ è $2Y = 3\sqrt{2}X^2$. Infine, il fuoco di $\mathcal{C}$ è il punto $F = \begin{pmatrix} 5/12 \\ 1/12 \end{pmatrix}$ e la direttrice è la sua polare, ovvero la retta $d : 6x + 6y = 1$. □

ESERCIZIO 10. *Siano fissate due rette perpendicolari h e d del piano euclideo. È vero o falso che tutte le parabole aventi asse h e direttrice d formano un fascio?*

Si descriva tale famiglia di coniche nel caso in cui h sia l'asse delle ordinate ($x = 0$) e d l'asse delle ascisse ($y = 0$).

Svolgimento. Non è vero che tale famiglia di coniche sia un fascio, come si può vedere dall'esempio proposto, che, a meno di un cambiamento di coordinate è da considerarsi il "caso generale".

Le parabole che hanno la retta $x = 0$ come asse hanno un'equazione del tipo $2y = ax^2 + b$, al variare dei parametri a e b. Osserviamo che, fissato un punto F della retta h (diverso da $h \cap d$, chè la conica degenera nella retta h con molteplicità 2), vi è un'unica parabola che ha F come fuoco e d come direttrice (e quindi h come asse). Sia quindi $F = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ed imponiamo la condizione che tutti i punti della conica, che sono del tipo $\begin{pmatrix} x \\ \frac{ax^2+b}{2} \end{pmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$, siano equidistanti da F e dalla retta d, ovvero si abbia

$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{ax^2+b}{2} - y_0\right)^2} = \left|\frac{ax^2+b}{2}\right| \qquad \text{ovvero} \qquad (1 - ay_0)x^2 + y_0(y_0 - b) = 0,$$

per ogni x in $\mathbb{R}$. Supponendo $y_0 \neq 0$ chè, in tal caso, l'equazione degenera in $x^2 = 0$ (asse con molteplicità 2), si ottiene che la matrice della parabola in questione deve avere la forma

$$A_{y_0} = \begin{pmatrix} y_0 & 0 & -1 \\ 0 & y_0^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, le coniche di questa famiglia sono parametrizzate dai punti di una retta, ma non formano un fascio, perchè la dipendenza dalle coordinate di tali punti non è lineare. □

(*) Si osservi che lo scambio tra r ed s (o fra j e $\bar{j}$) cambia il birapporto calcolato nel suo inverso e quindi il logaritmo cambia di segno. Volendo evitare i problemi legati alla determinazione del logaritmo, si potrebbe, ovviamente, scrivere la relazione nella forma $(j,\bar{j},r,s) = e^{\pm 2i\vartheta}$; la sua formulazione più tradizionale, mette in evidenza la definizione "intrinseca" dell'angolo.

Esame di Geometria (laurea in Fisica)
prova scritta del 18 febbraio 1998

ESERCIZIO 1. *Dati due sottoinsiemi di un insieme finito, S_1 ed S_2, vale la formula $\#(S_1 \cup S_2) = \#S_1 + \#S_2 - \#(S_1 \cap S_2)$ e vi è un analogo per le dimensioni dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita, nella formula $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. Dati tre sottoinsiemi, si ha*

$$\begin{aligned}\#(S_1 \cup S_2 \cup S_3) =&\#S_1 + \#S_2 + \#S_3 - \#(S_1 \cap S_2) - \#(S_1 \cap S_3)- \\ &- \#(S_2 \cap S_3) + \#(S_1 \cap S_2 \cap S_3);\end{aligned}$$

è vero o falso che vale l'analogo per i sottospazi, ovvero che

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) =& \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2)- \\ &- \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \ ?\end{aligned}$$

Svolgimento. È falso. Si considerino, ad esempio, uno spazio $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ di dimensione 2 e le tre rette $W_1 = \langle v_1 \rangle$, $W_2 = \langle v_2 \rangle$ e $W_3 = \langle v_1 + v_2 \rangle$. È chiaro che $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = \dim V = 2$, mentre il membro di destra della formula vale $3^{(*)}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia A una matrice reale antisimmetrica (${}^tA = -A$).*
(a) Si mostri che gli autovalori di A sono immaginari puri.
(b) Si mostri che $\mathbf{1} + A$ è una matrice invertibile.
(c) Si mostri che $P = (\mathbf{1} - A)(\mathbf{1} + A)^{-1}$ è una matrice ortogonale.

Svolgimento. (a). Sia $a \in \mathbb{C}$ un autovalore di A, allora $-a^2$ è un autovalore della matrice $-A^2 = {}^tAA$ che è simmetrica e semi-definita positiva e dunque, per il Teorema Spettrale, è diagonalizzabile, con tutti gli autovalori non-negativi. Si ha quindi $-a^2 \geq 0$, che è quanto volevamo.
(*b*). Un vettore v appartiene al nucleo della matrice $(1 + A)$ se, e solo se, è un autovettore della matrice A, relativo all'autovalore -1. Per quanto visto al punto precedente non esistono vettori (non-nulli) di questo tipo.
(*c*). Si ha ${}^tPP = (\mathbf{1} - A)^{-1}(\mathbf{1} + A)(\mathbf{1} - A)(\mathbf{1} + A)^{-1}$, ed i due fattori centrali commutano. □

ESERCIZIO 3. *Sia $\mathscr{H} = \left\{ A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \,|\, {}^tA = \overline{A} \right\}$.*
(a) Si calcoli $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{H}$.
(b) Si mostri che l'applicazione $g : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}$, definita ponendo $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ è un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva ed invariante rispetto all'azione $A \mapsto \sigma A \sigma^{-1}$ del gruppo unitario

$$U_{n+1} = \left\{ \sigma \in \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{C}) \,|\, {}^t\sigma\overline{\sigma} = \mathbf{1} \right\}.$$

(*) Possiamo osservare che, in generale, vale la disuguaglianza

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) \leq& \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2)- \\ &- \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3);\end{aligned}$$

perchè il membro di sinistra è uguale a $\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim[(W_1 + W_2) \cap W_3]$ e

$$\dim[(W_1 + W_2) \cap W_3] \geq \dim(W_1 \cap W_3) + \dim(W_2 \cap W_3) - \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = \dim[(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)],$$

per on'ovvia relazione di inclusione.

Svolgimento. (a). Sia $\{\, \varepsilon(h,k) \mid 0 \le h,k \le n \,\}$ la base canonica di $M_{n+1}(\mathbb{C})$. Lo spazio $\mathscr{H}$ è generato su $\mathbb{R}$ dalle matrici:

$$\begin{cases} \varepsilon(h,h) & \text{per } h = 0,\dots,n \\ \varepsilon(h,k) + \varepsilon(k,h) & \text{per } 0 \le h < k \le n \\ i[\varepsilon(h,k) - \varepsilon(k,h)] & \text{per } 0 \le h < k \le n \end{cases}$$

e queste formano una base di $\mathscr{H}$, che ha quindi dimensione $(n+1)^2$ su $\mathbb{R}$.
(b). Si osservi che il complessificato di $\mathscr{H}$ (cioè, lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, generato dalla stessa base) è tutto $M_{n+1}(\mathbb{C})$ e che l'applicazione g è la restrizione ad $\mathscr{H}$ della forma hermitiana (definita positiva) $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}({}^t\overline{A}B)$. Da ciò si deduce che g è un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva. Infine, se $\sigma \in U_{n+1}$, si ha

$$\operatorname{tr}\left({}^t(\overline{\sigma A \sigma^{-1}})\sigma B \sigma^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(\sigma {}^t\overline{A} B \sigma^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left({}^t\overline{A}B\right)$$

e ciò significa che la forma hermitiana (e quindi g) è invariante rispetto all'azione di U_{n+1}. □

ESERCIZIO 4. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) *Si determini l'indice di inerzia di g.*

Si dica quale tra le seguenti affermazioni è vera e si determini una base soddisfacente alle condizioni ivi descritte.

(b_1) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice* $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

(b_2) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice* $\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

(b_3) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice* $\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento. (a). Osserviamo che il sottospazio $U = \langle e_1, e_4 \rangle$ è un sottospazio isotropo di dimensione 2 e questo ci permette di concludere che $i(g) = 0$, perchè U deve avere intersezione banale con entrambo i sottospazi W_+ e W_- di una decomposizione di $\mathbb{R}^4$ del tipo descritto nel teorema di Sylvester. Ciò può accadere solo se entrambo i sottospazi hanno dimensione 2.
(b). È chiaro che l'unica asserzione compatibile con l'indice di inerzia di g è (b_2). Una base rispetto a cui g abbia la matrice in questione è, ad esempio, e_1, $\frac{1}{3}e_2$, $e_1 + 3e_4$, $\frac{1}{150}(-9e_1 + 5e_2 + 15e_3 + 3e_4)$. □

ESERCIZIO 5. *Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C e sia $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_n\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ definito dalle condizioni*

$$\begin{cases} \phi(v_i) = v_{i+1} & \text{se } 1 \le i < n \\ \phi(v_n) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \end{cases}.$$

Si determinino, la matrice di ϕ ed il suo polinomio caratteristico. È vero o falso che il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di ϕ coincidono?

Svolgimento. La matrice di ϕ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 1 & 0 & & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è uguale a $\det(x\mathbf{1} - A) = x^n - a_n x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} - \cdots - a_1$. Il polinomio caratteristico coincide con il polinomio minimo perchè, per ogni $d < n$, i vettori $v_1, v_2 = \phi(v_1), \dots, v_{d+1} = \phi^d(v_1)$ sono linearmente indipendenti e quindi, dato un qualsiasi polinomio $P(X)$, di grado d, l'endomorfismo $P(\phi)$, non può annullarsi in v_1. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di ϕ coincidono e sono uguali a $(x-2)^2(x+4)^2$. Le matrici J e P richieste sono, rispettivamente

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed il piano $\pi : x + y - z = 0$.*

(a) Si scriva l'equazione del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti che hanno uguale distanza dal punto P e dal piano π.

(b) Si determini la retta s, passante per P, perpendicolare a π e si classifichino dal punto di vista affine, le coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con i piani del fascio di asse s.

(c) Si verifichi che i piani perpendicolari ad s tagliano su $\mathcal{Q}$ una famiglia di cerchi (eventualmente di raggio immaginario).

Svolgimento. (a). La condizione di equidistanza da P e da π, si scrive nella forma

$$\delta_0(X, \pi) = \frac{|x + y - z|}{\sqrt{3}} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \delta_0(X, P),$$

che è equivalente all'equazione

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz - 12x + 6z + 15 = 0.$$

(b). La retta s, passa per P ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque le sue equazioni cartesiane sono $s : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$ e, poichè s contiene P ed è perpendicolare a π, ogni piano σ, di asse s, taglia su $\mathcal{Q}$ la parabola di fuoco P e direttrice $\sigma \cap \pi$.

(c). Supponiamo che lo spazio euclideo sia immerso nello spazio proiettivo con piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$. I piani perpendicolari ad s (ovvero i piani paralleli a π), tagliano cerchi su $\mathcal{Q}$ se, e solo se, l'intersezione $\pi \cap \pi_\infty \cap \mathcal{Q}$ è costituita da due punti dell'assoluto, di equazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Con un calcolo diretto si verifica che tale intersezione è costituita dai due punti $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \zeta \\ \zeta + 1 \end{pmatrix}$ e $\overline{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \overline{\zeta} \\ \overline{\zeta} + 1 \end{pmatrix}$, ove $\zeta \neq 1$ e $\zeta^3 = 1$.

Ciò conclude la verifica. □

ESERCIZIO 8. *Sia $\mathscr{H} = \{ A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \mid {}^tA = \overline{A} \}$ e si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathscr{H}$ che associa al punto X, di coordinate omogenee $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 = 1$, la matrice $A_X = (x_i \overline{x}_j)_{0 \leq i,j \leq n}$.*

Si mostri che

(a) l'applicazione φ è ben definita.

(b) l'applicazione φ è equivariante rispetto all'azione del gruppo unitario ovvero $\varphi(\sigma X) = \sigma A_X \sigma^{-1}$.

Svolgimento. (a). Per verificare che φ è ben definita, bisogna mostrare che non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee del punto X. Ciò si può verificare osservando che, indicata con $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la colonna delle coordinate omogenee del punto X, si ha $A_X = X {}^t\overline{X}$; inoltre, la condizione $\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 = 1$, permette di modificare le coordinate omogenee di un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ moltiplicandole tutte per una stessa costante $\lambda \in \mathbb{C}$ di modulo 1. In tal caso $\lambda\overline{\lambda} = 1$ e quindi non cambia la matrice A_X.

(*b*). La verifica che $\varphi(\sigma X) = \sigma A_X \sigma^{-1}$ è immediata se si ricorda che $A_X = X {}^t\overline{X}$ e che $\sigma \in U_{n+1}$, e quindi ${}^t\overline{\sigma} = \sigma^{-1}$. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4xy + 2y - 2 = 0,$$

e se ne determinino gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice ed equazione canonica.

Svolgimento. Si tratta di un'iperbole di centro $C = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ed assi $h_1 : x - y + 1 = 0$ (asse focale) ed $h_2 : 3x + 3y + 1 = 0$ (asse trasverso). L'equazione canonica è $9X^2 - 3Y^2 = 5$ ed i fuochi di $\mathcal{C}$ hanno coordinate omogenee $F_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 + \sqrt{10} \\ \sqrt{10} - 1 \end{pmatrix}$ ed $F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{10} - 2 \\ \sqrt{10} + 1 \end{pmatrix}$. Infine, i vertici, ovvero i punti di intersezione $\mathcal{C} \cap h_1$, hanno coordinate omogenee $V_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 + \sqrt{10} \\ 2 + \sqrt{10} \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 - \sqrt{10} \\ 2 - \sqrt{10} \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 10. *Si dice cammino polinomiale nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ ogni cammino avente la rappresentazione parametrica $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ con $x(t), y(t) \in \mathbb{C}[t]$. Si mostri che ogni cammino polinomiale è contenuto in un opportuna curva algebrica; ovvero che esiste un polinomio $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, tale che $f(x(t), y(t)) = 0$ in $\mathbb{C}[t]$.*

Si determini tale curva nel caso in cui $\gamma : \begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^3 \end{cases}$

Svolgimento. Siano $d_1 = \deg x(t)$ e $d_2 = \deg y(t)$. Si tratta di dimostrare che, per un opportuno intero n, i polinomi $x(t)^i y(t)^j$, con $0 \leq i, j \leq n$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{C}[t]$. Ciò è vero, per n sufficientemente elevato, perchè tali monomi sono $(n+1)^2$ ed hanno grado (in t) minore o uguale a $n(d_1 + d_2)$.

Nell'esempio proposto, si ha che $x(t)$ ed $y(t)$ sono zeri del polinomio $f(x, y) = y^2 - x^3 - 3xy - y$. □