Esame di Geometria (laurea in Fisica)
prova scritta del 17 giugno 1998

ESERCIZIO 1. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si determini l'insieme $\mathscr{D} = \{ B \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid AB = A \}$. *Posto* $V = M_{3\times3}(\mathbb{R})$, *si mostri che* $\mathscr{D}$ *è una sottovarietà lineare di* $\mathbb{A}(V)$ *e se ne determini la dimensione.*

Svolgimento. È chiaro che la matrice identica $\mathbf{1}_3$ appartiene a $\mathscr{D}$ ed inoltre che ogni altra soluzione si ottiene sommando ad $\mathbf{1}_3$ una matrice le cui colonne siano nel nucleo di A (cf. il *Teorema di Rouché-Capelli*). Poichè il nucleo di A è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, possiamo concludere che

$$\mathscr{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ -\alpha & 1-\beta & -\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 1+2\gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Infine, poichè ogni elemento di $\mathscr{D}$ si ottiene come somma di un punto di $\mathbb{A}(V)$ (la matrice $\mathbf{1}_3$) e di un elemento di un sottospazio vettoriale di dimensione 3 di V, si conclude che $\mathscr{D}$ è una sottovarietà lineare di dimensione 3 di $\mathbb{A}(V)$. □

ESERCIZIO 2. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e si consideri l'applicazione* $\phi_A : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$, *definita ponendo* $\phi_A(X) = AX - XA$, *al variare di* $X \in M_2(\mathbb{Q})$. *Si mostri che si tratta di un'applicazione lineare e si determinino, al variare di* A *in* $M_2(\mathbb{Q})$, *il nucleo e l'immagine di* ϕ_A.

Svolgimento. L'applicazione $\phi_A : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$ è un'applicazione lineare, perchè il prodotto di matrici distribuisce rispetto alla somma ed è compatibile con il prodotto di matrici per costanti. Osserviamo che, rispetto alla base (canonica) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, di $M_2(\mathbb{Q})$, l'applicazione ϕ_A ha matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b & c & 0 \\ -c & a-d & 0 & c \\ b & 0 & d-a & -b \\ 0 & b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha $\operatorname{rk} B \leq 2$. Per calcolare con precisione le dimensioni del nucleo e dell'immagine di ϕ_A, dobbiamo distinguere quindi alcuni casi.

$a \neq d$. In tal caso, il nucleo di ϕ_A ha dimensione 2 ed è il sottospazio di $M_2(\mathbb{Q})$ generato da $\mathbf{1}_2$ ed A, mentre l'immagine è il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & b \end{pmatrix} \right\rangle$.

$a = d$. Se uno almeno tra b e c è diverso da zero, allora ϕ_A ha ancora rango 2 e $\ker \phi_A = \langle \mathbf{1}_2, A \rangle$. Inoltre $\operatorname{im}\phi_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Infine, se A è una matrice scalare ($d = a$ e $b = c = 0$), allora tutte le matrici commutano con A e si ha quindi $\ker \phi_A = M_2(\mathbb{Q})$ ed $\operatorname{im}\phi_A = \langle 0 \rangle$. □

ESERCIZIO 3. *Siano* V *uno spazio vettoriale reale di dimensione* n *e* $g : V \times V \to \mathbb{R}$ *un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere con indice di inerzia* $i(g)$. *Si mostri che i sottospazi isotropi massimali di* V *hanno dimensione* $\dfrac{n - |i(g)|}{2}$.

Svolgimento. Sia $V = W_+ \oplus W_-$ una decomposizione di V del tipo descritto nel Teorema di Sylvester e sia $r = \dim W_+$. Supponiamo dapprima che $r \leq n - r$ e quindi che $i(g) = 2r - n \leq 0$. Se $W_- = U \oplus T$, ove U è un sottospazio di dimensione r, allora, il sottospazio $W_+ \oplus U$ contiene un sottospazio isotropo Z, di dimensione $r = \frac{n-|i(g)|}{2}$(*). Ora $Z^\perp = Z \oplus T$, e quindi in questo sottospazio non vi sono vettori isotropi al di fuori di Z. Ciò permette di concludere che Z è un sottospazio isotropo massimale.

Ora se $r \geq n - r$ ed $i(g) = 2r - n \geq 0$, si ha $W_+ = U' \oplus T'$, ove U' è un sottospazio di dimensione $n - r$, allora, il sottospazio $W_- \oplus U'$ contiene un sottospazio isotropo Z', di dimensione $n - r = \frac{n-|i(g)|}{2}$ e ragionando analogamente al caso precedente, si conclude che Z' è un sottospazio isotropo massimale. □

ESERCIZIO 4. *Si indichi con $g : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica $q(x) = 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 3x_5^2 - x_6^2$. Si dica se g è non-degenere e si determini la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^6$.*

Svolgimento. Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_6\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^6$. Rispetto a tale base, l'applicazione bilineare g ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\det A = -3$; quindi g è non-degenere. Inoltre, se si considerano i due sottospazi $U = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ e $W = \langle e_5, e_6 \rangle$, allora $\mathbb{R}^6 = U \oplus W$ ed i due spazi sono tra loro ortogonali. Inoltre la restrizione di g a ciascuno dei due spazi è non-degenere. L'indice di inerzia di g è somma degli indici di inerzia delle sue restrizioni ad U e W e perciò $i(g) = 0$ e quindi un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 3. Un tale sottospazio è, ad esempio, $I = \langle e_1, e_2, e_5 + \sqrt{3}e_6 \rangle$. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ i due sottogruppi di matrici*

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \qquad ed \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \right\}.$$

Si mostri che l'applicazione

$$\phi : \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{2i\theta} - e^{i\theta} \\ 0 & e^{2i\theta} \end{pmatrix}$$

è una corrispondenza biunivoca di SO_2 su U e che $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ per ogni coppia di matrici A, B in SO_2 (cioè ϕ è isomorfismo di gruppi).

È vero o falso che esiste una matrice $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ tale che $\phi(A) = P^{-1}AP$ per ogni A in SO_2?

Svolgimento. Siano $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ ed $S_\theta = \phi(R_\theta)$. Ogni numero complesso di modulo 1, si scrive nella forma $e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ (e tale scrittura è unica se si sceglie $\theta \in [0, 2\pi)$) e ciò mostra che ϕ è una corrispondenza biunivoca. Inoltre, con un calcolo diretto si verifica che $S_\theta S_\rho = S_{\rho+\theta}$ e quindi ϕ è un isomorfismo di gruppi.

Non è vero però che esista una matrice P che realizzi questo isomorfismo, perchè, in generale, R_θ ed S_θ hanno polinomi caratteristici distinti, infatti $p_{R_\theta}(X) = X^2 - 2X\cos\theta + 1 \neq (X - e^{i\theta})(X - e^{2i\theta}) = p_{S_\theta}(X)$. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

(*) Ad esempio, se $x_1, \dots, x_r$ è una base ortonormale di W_+ ed $y_1, \dots, y_r$ è una base ortogonale di U con $g(y_i, y_i) = -1$, per $i = 1, \dots, r$, il sottospazio $Z = \langle x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r \rangle$ è un sottospazio isotropo.

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo sono, rispettivamente, $p_\phi(X) = (X+3)^4$ e $\lambda_\phi(X) = (X+3)^3$. Le matrici J e P possono quindi essere scelte della forma

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

in quanto le colonne di P corrispondono agli autovettori generalizzati dell'endomorfismo ϕ presi nell'ordine opportuno. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \textit{ed} \qquad s : \begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che si tratta di due rette sghembe e si determini la retta t, perpendicolare ed incidente ad entrambo le rette.

(b) Si determini il luogo $\mathcal{Q}$ dei punti equidistanti dalle due rette.

(c) Si verifichi che i piani perpendicolari ad t tagliano su $\mathcal{Q}$ una famiglia di coniche tra loro affinemente equivalenti (quando non siano degeneri).

Svolgimento. (a). Se consideriamo il sistema lineare formato dalle equazioni di r ed s, si verifica che la matrice completa ha rango 4, e la matrice incompleta ha rango 3. Dunque, si tratta di due rette sghembe.

La retta r passa per il punto $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v_r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per il punto $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; dunque le due rette sono entrambo perpendicolari al vettore $v_t = v_r \times v_s = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e quindi la retta t si ottiene come intersezione del piano contenente r e parallelo a v_t col piano contenente s e parallelo a v_t; ovvero

$$t : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}.$$

(b). Per quanto visto al punto precedente un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{Q}$ se, e solo se,

$$\delta_0(X, r) = \frac{\|(X - R) \times v_r\|}{\|v_r\|} = \frac{\|(X - S) \times v_s\|}{\|v_s\|} = \delta_0(X, s).$$

Da ciò si deduce che i punti di $\mathcal{Q}$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$\mathcal{Q} : -4xy + 4yz - 4x + 6y - 2z + 6 = 0.$$

(c). Due coniche sono affinemente equivalenti (su $\mathbb{R}$) se, e solo se, hanno lo stesso tipo di intersezione con la retta impropria. Nel caso in questione, tutti i piani perpendicolari a t hanno la stessa retta impropria di equazioni omogenee

$$r_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases};$$

e tale retta interseca la (iper)superficie $\mathcal{Q}$ nei due punti reali $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque i piani in questione tagliano su $\mathcal{Q}$ una famiglia di iperboli. □

ESERCIZIO 8. *Nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si considerino le due coppie di punti*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino due punti X ed Y (eventualmente in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) che separino armonicamente entrambo le coppie, ovvero tali che $(X, Y, P, P') = (X, Y, Q, Q') = -1$.

Svolgimento. Si tratta di determinare la proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che manda $P \mapsto P'$, $P' \mapsto P$ e $Q \mapsto Q'$ e di determinare i suoi punti uniti X ed Y. Infatti una tale proiettività è un'involuzione (perchè?) ed i punti uniti dell'involuzione separano armonicamente le coppie di punti corrispondenti. Osserviamo che i quattro punti sono e due a due distinti e quindi la proiettività cercata esiste, ed una sua soprastante deve avere matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{smallmatrix}\right)$, soddisfacente alle condizioni

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \rho_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \rho_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ove ρ_1, ρ_2, ρ_3 sono tre costanti non nulle. Ciò significa che le entrate della matrice A devono essere soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2a_{00} - 2a_{01} = a_{10} - a_{11} \\ a_{00} + 2a_{01} = -a_{10} - 2a_{11} \\ a_{00} = 2a_{10} \end{cases},$$

e quindi (a meno di moltiplicazione per una costante) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è $x^2 - 18$ e quindi i sottospazi di autovettori di A (che corrispondono ai punti uniti dell'involuzione) sono i punti $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\sqrt{2} - 4 \end{pmatrix}$ ed $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\sqrt{2} - 4 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$(†). □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 2 = 0,$$

e se ne determinino gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice ed equazione canonica.

Svolgimento. Si tratta di una parabola non-degenere, avente come asse la retta $h : 2x + 2y + 1 = 0$ e vertice $V = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$. L'equazione canonica è $y = \sqrt{2}x^2$ e fuoco e direttrice sono, rispettivamente, il punto $F = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la retta $d : 2y - 2x - 5 = 0$. □

(†) Si ricordi che, dati quattro punti della retta proiettiva, di coordinate omogenee

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix},$$

si ha $(A, B, C, D) = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}$. Utilizzando le coordinate omogenee dei punti $P, P', Q, Q', X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, si ottiene un sistema di due equazioni non omogenee, (ciascuna) di secondo grado nelle incognite x, y, che da come soluzione la stessa coppia di punti scritta sopra. Lo studente è invitato a dare una giustificazione del fatto che un sistema di quarto grado abbia, in questo caso, solo due soluzioni.

ESERCIZIO 10. *Si dice cammino polinomiale nel piano affine* $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ *ogni cammino avente la rappresentazione parametrica* $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ *con* $x(t), y(t) \in \mathbb{C}[t]$. *Si mostri che ogni cammino polinomiale è contenuto in un'opportuna curva algebrica; ovvero che esiste un polinomio* $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, *tale che* $f(x(t), y(t)) = 0$ *in* $\mathbb{C}[t]$.

Si determini tale curva nel caso in cui $\gamma : \begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^3 \end{cases}$

Svolgimento. Siano $d_1 = \deg x(t)$ e $d_2 = \deg y(t)$. Si tratta di dimostrare che, per un opportuno intero n, i polinomi $x(t)^i y(t)^j$, con $0 \leq i, j \leq n$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{C}[t]$. Ciò è vero, per n sufficientemente elevato, perchè tali monomi sono $(n + 1)^2$ ed hanno grado (in t) minore o uguale a $n(d_1 + d_2)$.

Nell'esempio proposto, si ha che $x(t)$ ed $y(t)$ sono zeri del polinomio $f(x, y) = y^2 - x^3 - 3xy - y$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 8 luglio 1998

ESERCIZIO 1. *Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ e si considerino le basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ di W. Siano date inoltre, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ e $\psi_{(a,b)} : V \to W$, definite dalle condizioni*

$$\phi(v_1 + v_2) = w_1, \qquad \phi(v_3) = w_1 + w_2, \qquad \phi(v_1 + v_3) = 3w_2;$$
$$\psi_{(a,b)}(v_2) = 2w_1 - 2w_2, \qquad \psi_{(a,b)}(2v_1) = -2w_1 + 4w_2, \qquad \psi_{(a,b)}(3v_1 + 3v_2 + 3v_3) = aw_1 + bw_2.$$

(a) Si scriva la matrice di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.
(b) Si mostri che $\mathbb{L} = \left\{ \psi_{(a,b)} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(Hom_{\mathbb{Q}}(V, W))$, se ne calcoli la dimensione, e si dica se $\phi \in \mathbb{L}$.

Svolgimento. (a). Tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$, lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W)$ si identifica con $M_{2\times3}(\mathbb{Q})$ ed, in particolare, l'applicazione lineare ϕ corrisponde alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

avendosi $\phi(v_3) = w_1 + w_2$, $\phi(v_1) = 3w_2 - \phi(v_3) = 2w_2 - w_1$, $\phi(v_2) = w_1 - \phi(v_1) = 2w_1 - 2w_2$.
(b). Con calcoli analoghi si verifica che $\mathbb{L}$ corrisponde all'insieme di matrici

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{a-3}{3} \\ 2 & -2 & \frac{b}{3} \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \right\} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ed è perciò una sottovarietà lineare di dimensione 2 di $\mathbb{A}(M_{2\times3}(\mathbb{Q}))$. È chiaro infine che, per $a = 6$ e $b = 3$, si ottiene esattamente la matrice A e quindi $\phi \in \mathbb{L}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione qualsiasi) sul corpo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo per cui $\phi^2 = \phi$. È vero che $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\phi$?*

Svolgimento. Dato $v \in V$, si ha che $v = \phi(v) + (v - \phi(v))$, ove il primo addendo sta in $\mathrm{im}\phi$ ed il secondo appartiene a $\ker\phi$, perchè $\phi(v) - \phi^2(v) = \phi(v) - \phi(v) = 0$ e quindi $V = \ker\phi + \mathrm{im}\phi$. Se poi $w \in \ker\phi \cap \mathrm{im}\phi$, allora $w = \phi(u)$ e $0 = \phi(w) = \phi^2(u) = \phi(u) = w$. Dunque la somma dei due sottospazi è diretta. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^3$ con l'applicazione bilineare g di matrice A rispetto alla base canonica, e sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice B rispetto alle basi canoniche, ove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fissato il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$, si studi il sottoinsieme

$$C = \left\{ X \in \mathbb{A}(\mathbb{R}^2) \mid g(\phi(X - P), \phi(X - P)) = 1 \right\}.$$

Svolgimento. Posto $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$, si ha che $X \in C$ se, e solo se $(x, y+1)^t BAB \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} = 1$. Così si ottiene che C è la conica di equazione $x^2 + 2xy + 2x = 1$. Dunque si tratta di un'iperbole non degenere di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$, di centro P ed asintoti $a_1 : x + 2y + 2 = 0$ ed $a_2 : x = 0$. □

ESERCIZIO 4. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare non-degenere. Si mostri che g è simmetrica oppure alternante se, e solo se, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ si ha $g(v, w) = 0 \Leftrightarrow g(w, v) = 0$.*

Svolgimento. Sia $\phi : V \to V^*$ l'isomorfismo definito dalla condizione $\phi(w) = g(-, w)$ ed indichiamo con $\phi^* : V \to V^*$ l'applicazione trasposta, ovvero $\phi^*(w) = g(w, -)$. Dato $v \in V$, si ha

$$x \in \phi^*(v)^\perp \iff \phi^*(v) \circ x = 0 \iff v \circ \phi(x) \iff g(v, x) = 0 \iff$$
$$\iff g(x, v) = 0 \iff \phi(v) \circ x = 0 \iff x \in \phi(v)^\perp.$$

Dunque, per ogni $v \in V$, si ha $\langle \phi^*(v) \rangle^\perp = \langle \phi(v) \rangle^\perp$ e quindi $\langle \phi^*(v) \rangle = \langle \phi(v) \rangle$. Ciò significa che, per ogni vettore v di V, esiste una costante α_v tale che $\phi^*(v) = \alpha_v \phi(v)$. Dati due vettori $v, w \in V$, si ha

$$\alpha_v \phi(v) + \alpha_w \phi(w) = \phi^*(v) + \phi^*(w) = \phi^*(v + w) = \alpha_{v+w} \phi(v + w) = \alpha_{v+w} \phi(v) + \alpha_{v+w} \phi(w)$$

e quindi (ϕ è isomorfismo) si conclude che $\alpha_v = \alpha_w = \alpha_{v+w}$, cioè vi è un'unica costante α per cui $\phi^*(v) = \alpha\phi(v)$ per tutti i vettori v di V. Infine, per il Teorema di bidualità, si ha

$$\phi = \phi^{**} = (\phi^*)^* = (\alpha\phi)^* = \alpha(\phi^*) = \alpha^2 \phi$$

e quindi, $\alpha = \pm 1$ e perciò g è simmetrica oppure alternante. □

ESERCIZIO 5. *Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, si indichi con $\mathscr{C}_A$ il sottospazio vettoriale*

$$\mathscr{C}_A = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid XA = AX \}.$$

(a) Si mostri che $\dim \mathscr{C}_A = \dim \mathscr{C}_B$ quando A e B sono simili.
(b) Si mostri che $\mathscr{C}_A = \langle \mathbf{1}, A, \dots, A^{n-1} \rangle$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.

Svolgimento. (a). Fissata una matrice $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ per cui $B = P^{-1}AP$, allora $X \in \mathscr{C}_A$ se, e solo se, $P^{-1}XP \in \mathscr{C}_B$ e la corrispondenza $X \mapsto P^{-1}XP$ è un isomorfismo di spazi vettoriali(*). Dunque i due sottospazi corrispondenti hanno la stessa dimensione.
(b). Se il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti, allora la matrice A è diagonalizzabile ed il suo polinomio minimo ha grado n, perchè coincide con il polinomio caratteristico. Dunque il sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$ generato dalle potenze di A coincide con $\langle \mathbf{1}, A, \dots, A^{n-1} \rangle$ ed è contenuto in $\mathscr{C}_A$. Considerando una matrice diagonale simile ad A, si verifica con un facile calcolo che $\dim \mathscr{C}_A = n$ e da ciò si conclude che $\langle \mathbf{1}, A, \dots, A^{n-1} \rangle = \mathscr{C}_A$ perchè i due sottospazi hanno la stessa dimensione. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $(X - 2)^4$ e si ha $(A - 2)^2 \neq 0 = (A - 2)^3$; dunque il polinomio minimo di ϕ è $(X - 2)^3$. Da ciò si conclude che le matrici J e P cercate sono

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) In realtà, il sottospazio $\mathscr{C}_A$ è chiuso rispetto al prodotto (verificarlo!) ed è quindi un sottoanello di $M_n(\mathbb{C})$ e inoltre la corrispondenza $X \mapsto P^{-1}XP$ è un isomorfismo dell'anello $M_n(\mathbb{C})$ in sé.

ove P è stata ottenuta determinando una base rispetto a cui ϕ ha matrice uguale a J. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri l'ipersuperficie di equazione*

$$\mathscr{E} : x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 3$$

Si determinino i piani che tagliano su $\mathscr{E}$ dei cerchi (eventualmente di raggio immaginario).

Svolgimento. Consideriamo lo spazio euclideo immerso nel modo consueto nello spazio proiettivo, con piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$. Un piano π taglia su $\mathscr{E}$ un cerchio se, e solo se, la sua retta impropria, $\pi \cap \pi_\infty$, interseca $\mathscr{E}$ in due punti ciclici per la metrica euclidea, ovvero in due punti impropri appartenenti alla conica $\mathscr{H} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Si tratta quindi di trovare, i punti di $\pi_\infty \cap \mathscr{H} \cap \mathscr{E}$ e determinare le famiglie di piani (reali e propri) che contengono coppie di tali punti. Si ha

$$\pi_\infty \cap \mathscr{H} \cap \mathscr{E} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che i quattro punti (complessi, a due a due, coniugati) di intersezione sono contenuti nelle due rette (improprie) di equazioni omogenee

$$r_1 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad r_1 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Dunque i piani che tagliano cerchi su $\mathscr{E}$ formano i due fasci di piani paralleli $\pi_1^{(k)} : 2y - z = k$ e $\pi_2^{(m)} : 2y + z = m$(†). □

ESERCIZIO 8. *Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ le rette*

$$r : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$$

e si verifichi che si tratta di tre rette, a due a due sghembe.

(a) *Si mostri che, dato un punto P che non sia contenuto in r o in s, esiste un'unica retta ℓ_P, passante per P ed incidente sia r che s.*

(b) *Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti P di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ per cui passa una retta incidente tutte e tre le rette r, s e t.*

Svolgimento. Due rette sono sghembe se, e solo se, il sistema lineare omogeneo costituito dalle equazioni cartesiane delle due rette ha rango 4. È quindi sufficiente verificare che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -1, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3,$$

per concludere che le tre rette sono, a due a due, sghembe.

(a). Si ha $\ell_P = (r + P) \cap (s + P)$. Infatti, la retta ℓ_P deve essere contenuta in entrambo i piani $r + P$ ed $s + P$. Poichè le due rette, r ed s, sono sghembe, i due piani devono essere distinti e si intersecano quindi in una retta, che è la retta cercata.

(b). Per quanto visto nel punto precedente, P è un punto di $\mathscr{Q}$ se, e solo se, l'intersezione $(P+r) \cap (P+s) \cap t$ è diversa dal vuoto proiettivo.

(†) Lasciamo al lettore la cura di verificare che, per tutti i valori di k ed m, i cerchi hanno punti reali.

Posto $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} P + r &: (p_1 - p_2)(x_0 + x_1) - (p_0 + p_1)(x_1 - x_2) = 0, \\ P + s &: (p_0 - 2p_3)(x_2 + x_3) - (p_2 + p_3)(x_0 - 2x_3) = 0; \end{aligned}$$

quindi $P \in \mathcal{Q}$ se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} p_1 - p_2 & -p_0 - p_2 & p_0 + p_1 & 0 \\ -p_2 - p_3 & 0 & p_0 - 2p_3 & p_0 + 2p_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2p_0p_1 - p_0p_2 - 3p_0p_3 - 4p_1p_2 + p_2^2 - 3p_2p_3 = 0.$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione di secondo grado nelle coordinate del punto P, e perciò $\mathcal{Q}$ è un'ipersuperficie quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$[(†)] □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 - 5xy + x = 0,$$

e se ne determinino gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti ed equazione canonica.

Svolgimento. Iperbole: centro $C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; assi $h_1 : x+y = 1$, $h_2 : 9x-9y+1 = 0$; asintoti: $a_1 : 6x-3y-1 = 0$, $a_2 : 6y - 3x - 2 = 0$; fuochi $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \pm 2\sqrt{5} \\ 5 \pm 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$; equazione canonica: $9X^2 - 81Y^2 = 4$. □

ESERCIZIO 10. *Sia $\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ una proiettività. Si dice che due punti $P \neq Q$ di $\mathbb{P}^1(C)$ formano una coppia involutoria rispetto a ϕ se $\phi(P) = Q$ e $\phi(Q) = P$. Si mostri che una proiettività ϕ è un'involuzione se, e solo se, esiste una coppia involutoria rispetto a ϕ.*

Svolgimento. È chiaro che se ϕ è un'involuzione allora, se P non è uno dei due punti uniti, allora P e $\phi(P)$ formano una coppia involutoria rispetto a ϕ ed una delle due implicazioni è dimostrata.

Supponiamo quindi che esista una coppia involutoria P, Q e sia X un punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, distinto da P e Q. Se mostriamo che si ha $\phi^2(X) = X$, per l'arbitrarietà della scelta di X, si conclude che ϕ ha periodo 2. Per la *regola del doppio scambio*, si ha $(P, Q, \phi(X), X) = (Q, P, X, \phi(X))$; e, d'altra parte, poichè le proiettività conservano i birapporti, e P, Q sono una coppia involutoria, si ha $(Q, P, X, \phi(X)) = (P, Q, \phi(X), \phi^2(X))$. Dato che i tre punti $P, Q, \phi(X)$ sono a due a due distinti e quindi formano un riferimento in $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, dall'uguaglianza $(P, Q, \phi(X), X) = (P, Q, \phi(X), \phi^2(X))$, si conclude necessariamente che $X = \phi^2(X)$, e ciò è quanto dovevamo dimostrare. □

(†) L'applicazione bilineare associata a questa forma quadratica è non degenere ed ha indice di inerzia 0, perchè il sottospazio $\langle e_2, e_4 \rangle$ è isotropo. Quindi $\mathcal{Q}$ è una quadrica a punti iperbolici.

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 10 settembre 1998

ESERCIZIO 1. *Si considerino gli spazi vettoriali V e W su $\mathbb{Q}$ e le basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ di W. Sia $\phi : W \to V$ l'applicazione lineare, definita dalle condizioni*

$$\phi(w_1 + w_2) = v_1 + 2v_3, \qquad \phi(w_1 - w_2) = 4v_2 - 3v_1.$$

(a) Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\phi)$.
(b) Si determini l'insieme $\mathbb{L} = \{ \psi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V, W) \mid \psi \circ \phi = 1_W \}$, si mostri che $\mathbb{L}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(Hom_{\mathbb{Q}}(V, W))$ e se ne calcoli la dimensione.

Svolgimento. (a). Poichè ϕ è un'applicazione lineare, si ha

$$\begin{aligned} 2\phi(w_1) &= \phi(w_1 + w_2) + \phi(w_1 - w_2) = -2v_1 + 4v_2 + 2v_3 \\ 2\phi(w_2) &= \phi(w_1 + w_2) - \phi(w_1 - w_2) = 4v_1 - 4v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

e quindi

$$A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b). Tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W) \to M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$, possiamo affermare che, determinare gli elementi di $\mathbb{L}$, è equivalente a determinare le matrici

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

soddisfacenti alla condizione $XA = \mathbf{1}_2$. Si tratta di un sistema lineare (non-omogeneo) di rango 4 nelle 6 entrate della matrice X e quindi le sue soluzioni formano una sottovarietà lineare di dimensione 2 dello spazio affine $\mathbb{A}(M_{2\times 3}(\mathbb{Q}))$. Abbiamo quindi bisogno di una soluzione particolare del problema $XA = \mathbf{1}_2$ (che esiste perchè $\mathrm{rk}\,\phi = \mathrm{rk}\,A = 2$) e delle soluzioni del problema omogeneo associato $XA = \mathbf{0}$. Dunque gli elementi di $\mathbb{L}$ corrispondono a matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\alpha & 3\alpha & -2\alpha \\ 4\beta & 3\beta & -2\beta \end{pmatrix},$$

al variare di α e β in $\mathbb{Q}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Si mostri che l'insieme $\mathcal{U} = \{ B \in M_3(\mathbb{Q}) \mid imB \subseteq imA \}$ è un sottospazio di $M_3(\mathbb{Q})$ e se ne determini una base.
(b) Si consideri l'applicazione bilineare (simmetrica e non-degenere) $M_3(\mathbb{Q}) \times M_3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, definita da $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}({}^tXY)$ e si determini il sottospazio $\mathcal{U}^\perp$.

Svolgimento. (a). La matrice A ha rango 2 e le sue prime due colonne sono linearmente indipendenti e quindi $\mathrm{im}A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Affinchè una matrice B appartenga ad $\mathcal{U}$, è necessario e sufficiente che le colonne di B siano elementi di im$A$ e quindi $\mathscr{U}$ è un sottospazio di dimensione 6 di $M_3(\mathbb{Q})$ ed una sua base è data dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). Affinchè si abbia $\operatorname{tr}({}^tXU) = 0$ per ogni matrice U di $\mathscr{U}$, le righe della matrice ${}^tX$ devono essere elementi di $(\operatorname{im}A)^\perp = \langle(2,4,1)\rangle \subset M_{1\times 3}(\mathbb{Q})$. Dunque $\mathscr{U}^\perp$ è un sottospazio di dimensione 3 di $M_3(\mathbb{Q})$ ed i suoi elementi sono del tipo

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ 4\alpha & 4\beta & 4\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

al variare di α, β, γ in $\mathbb{Q}$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale reale V dotato dell'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$.

(a) Si verifichi che g è degenere e che il suo nucleo N ha dimensione 1.

(b) Sia $W = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\rangle$, sia fissato un generatore v di N ed indichiamo con $\pi_v : V \to W$ la proiezione parallela a v. Si consideri l' applicazione $\tilde{g} : W \times W \to \mathbb{R}$ così definita: dati due vettori w e w' in W, siano $x, x' \in V$, tali che $\pi_v(x) = w$ e $\pi_v(x') = w'$ e si ponga $\tilde{g}(w, w') := g(x, x')$. Si mostri che $\tilde{g}$ è ben definita e non-degenere.

(c) Si determini l'indice di inerzia di $\tilde{g}$.

Svolgimento. (a). Si verifica con un calcolo diretto (eliminazione di Gauß) che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha come soluzioni il sottospazio $N = \langle v_2 - v_3 - v_4\rangle$, che è quindi il nucleo di g.

(b). Per verificare che $\tilde{g}$ è ben definita, bisogna mostrare che il valore di $\tilde{g}(w, w')$ non dipende dalla scelta dei vettori $x, x' \in V$, tali che $\pi_v(x) = w$ e $\pi_v(x') = w'$. Se $y, y' \in V$ si proiettano anch'essi su w e w', deve aversi $y = x + \alpha v$ ed $y' = x' + \beta v$ per opportune costanti α e β. Allora, si ha

$$g(y, y') = g(x + \alpha v, x' + \beta v) = g(x, x') + \alpha g(v, x') + \beta g(x, v) + \alpha\beta g(v, v) = g(x, x'),$$

perchè v appartiene al nucleo di g, e ciò è quanto dovevamo verificare.

Si osservi che $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ e che quindi una matrice $\tilde{G}$ di $\tilde{g}$, si può ottenere da G cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna. Dunque si ha

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale ad 1 e dunque $\tilde{g}$ è non-degenere.

(c). Infine, si osservi che una base ortogonale di W è data dai vettori $v_1, v_3, 2v_1 - 3v_2 + 3v_3$ e si ha $\tilde{g}(v_1, v_1) = 3$, $\tilde{g}(v_3, v_3) = -1$, $\tilde{g}(2v_1 - 3v_2 + 3v_3, 2v_1 - 3v_2 + 3v_3) = -3$, e quindi $i(\tilde{g}) = -1$. □

ESERCIZIO 4. *Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{C})$ si dice una matrice di permutazione se, in ogni riga ed in ogni colonna di A tutte le entrate sono nulle, eccetto una che è uguale ad 1.*

(a) *Si mostri che le colonne di A, opportunamente permutate, formano la base canonica di $\mathbb{C}^n$*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *Se le colonne della matrice A sono ordinatamente $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$, per un'opportuna permutazione $\sigma \in \Sigma_n$, si verifichi che $\det A = \operatorname{sgn}\sigma$.*

(c) *Nelle notazioni del punto precedente; se la matrice A corrisponde alla permutazione σ e la matrice B corrisponde alla permutazione τ, si mostri che la matrice prodotto AB è ancora una matrice di permutazione, corrispondente alla permutazione composta $\sigma \circ \tau$.*

Svolgimento. (a). Poichè le colonne di A hanno tutte le entrate nulle, eccetto una che è uguale ad 1, è chiaro che sono elementi della base canonica. Inoltre, poichè anche le righe di A hanno tutte le entrate nulle, eccetto una, allora non vi possono essere in A due colonne uguali e quindi, a meno dell'ordine, le colonne di A coincidono con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{C}^n$.

(b). Se le colonne della matrice A sono ordinatamente $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$, per un'opportuna permutazione $\sigma \in \Sigma_n$, allora $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ ove l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è definita dalle condizioni $\phi(e_j) = e_{\sigma(j)}$, per $j = 1, \dots, n$. Si conclude che

$$\det A = \det\phi = \frac{D(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}{D(e_1, \dots, e_n)} = \operatorname{sgn}\sigma,$$

ove D è una qualsiasi applicazione n-lineare e alternante di $\mathbb{C}^n$.

(c). Nelle notazioni del punto precedente, $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$, ove l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è definita dalle condizioni $\phi(e_j) = e_{\sigma(j)}$, per $j = 1, \dots, n$ e $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\psi)$ ove l'applicazione lineare $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è definita dalle condizioni $\psi(e_j) = e_{\tau(j)}$, per $j = 1, \dots, n$. si conclude che $AB = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi \circ \psi)$ e

$$\phi(\psi(e_j)) = \phi(e_{\tau(j)}) = e_{\sigma(\tau(j))} \qquad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Ciò è quanto si doveva dimostrare. □

ESERCIZIO 5. *Sia $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$, una matrice diagonale. Si mostri che ogni matrice diagonale si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{1}, \Delta, \dots, \Delta^{n-1}$ se, e solo se, gli autovalori di Δ sono a due a due distinti.*

Svolgimento. Siano $c_1, \dots, c_n$ gli autovalori della matrice Δ. Allora $\mathbf{1}, \Delta, \dots, \Delta^{n-1}$ generano il sottospazio delle matrici diagonali se e solo se, i vettori colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} c_1^{n-1} \\ \vdots \\ c_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

sono linearmente indipendenti; ovvero se, e solo se, il determinante di Van der Monde

$$V(c_1, \dots, c_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (c_j - c_i)$$

è diverso da zero. Ciò accade se, e solo se, le costanti $c_1, \dots, c_n$ sono, a due a due, distinte. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X-3)^4$. Il polinomio minimo è $(X-3)^3$, come si verifica direttamente osservando che

$$A - 3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A-3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (A-3)^3 = \mathbf{0}.$$

I vettori $e_2 \notin \ker(\phi-3)^2$, $-e_1-e_3 = (\phi-3)(e_2)$, $e_3-2e_4 = (\phi-3)^2(e_2)$ e l'autovettore e_1+e_4, opportunamente riordinati, formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J. Dunque

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri l'ipersuperficie di equazione*

$$\mathscr{E} : x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 3$$

(a) *Si determinino i due fasci di piani che tagliano su $\mathscr{E}$ dei cerchi e si distinguano i cerchi di raggio reale e di raggio immaginario.*

(b) *Si determini il luogo formato dai centri di tali circonferenze.*

Svolgimento. (a). Consideriamo lo spazio euclideo immerso nel modo consueto nello spazio proiettivo, con piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$. Un piano (reale) π taglia su $\mathscr{E}$ un cerchio se, e solo se, la sua retta impropria, $\pi \cap \pi_\infty$, interseca $\mathscr{E}$ in due punti ciclici per la metrica euclidea, ovvero in due punti impropri appartenenti alla conica $\mathscr{H} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Si tratta quindi di trovare, i punti di $\pi_\infty \cap \mathscr{H} \cap \mathscr{E}$ e determinare le famiglie di piani (reali e propri) che contengono coppie di tali punti. Si ha

$$\pi_\infty \cap \mathscr{H} \cap \mathscr{E} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che i quattro punti (complessi, a due a due, coniugati) di intersezione sono contenuti nelle due rette (reali ed improprie) di equazioni omogenee

$$s_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad t_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Dunque i piani che tagliano cerchi su $\mathscr{E}$ formano i due fasci di piani paralleli

$$\tau^{(k)} : x + 2y = k \qquad \text{e} \qquad \sigma^{(k)} : x - 2y = k.$$

Per sapere se su un tale piano resta tagliato un cerchio con o senza punti reali, basta considerare la forma quadratica indotta da $\mathscr{E}$ sul sottospazio di $\mathbb{R}^4$ corrispondente al piano in questione. Più esplicitamente, al piano $\sigma^{(k)}$ corrisponde il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni dell'equazione omogenea $x_1 - 2x_2 - kx_0 = 0$. Su tale sottospazio (x_0, x_2, x_3) sono un sistema di coordinate ($x_1 = 2x_2 + kx_0$) ed in tali coordinate, la forma quadratica indotta da $\mathscr{E}$ è $(k^2-3)x_0^2 + 4kx_0x_2 + 10x_2^2 + 2x_3^2$ che è definita positiva se, e solo se, $k^2 > 5$.

Dunque, i cerchi $\sigma^{(k)} \cap \mathscr{E}$ hanno raggio reale e positivo se $k^2 < 5$, si riducono ad un punto[(*)] se $k^2 = 5$, mentre hanno raggio immaginario se la forma quadratica è definita positiva, ovvero se $k^2 > 5$. Un calcolo analogo porta a determinare gli stessi valori di k anche per i raggi dei cerchi $\tau^{(k)} \cap \mathscr{E}$.

(b). Il centro di una conica (quando esiste) è il polo della retta impropria del piano affine su cui giace la conica. La superficie $\mathscr{E}$ è una quadrica dello spazio tridimensionale e quindi determina una polarità di tale spazio. Inoltre, trattandosi di due fasci di piani paralleli, si ha la stessa retta impropria per tutti i piani di un fascio. Dunque il centro del cerchio tagliato su $\mathscr{E}$ dal piano $\sigma^{(k)}$ è l'intersezione tra tale piano e la polare (rispetto ad $\mathscr{E}$) della retta s_∞ ed analogamente, il centro del cerchio tagliato su $\mathscr{E}$ dal piano $\tau^{(k)}$ è l'intersezione tra tale piano e la polare della retta t_∞. Ciò significa che i centri dei circoli di $\mathscr{E}$ sono tutti e soli i punti delle polari delle rette s_∞ e t_∞, ovvero formano le due rette di equazioni affini[(†)]

$$s : \begin{cases} x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad t : \begin{cases} x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 8. *Siano E^n lo spazio euclideo di dimensione n ed $f : E^n \to E^n$ un'applicazione biunivoca tale che $\|f(Q) - f(P)\| = \|Q - P\|$ per ogni coppia di punti $P, Q \in E^n$. Si mostri che f è un'affinità (e quindi un'isometria).*

Svolgimento. Indichiamo con V lo spazio dei vettori di E^n e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica (definita positiva) che determina la metrica euclidea. Fissato un punto $P \in E^n$, possiamo considerare l'applicazione (biiettiva) $\phi : V \to V$ definita ponendo $\phi(v) := f(P + v) - f(P)$. Se mostriamo che ϕ è un'applicazione lineare, abbiamo mostrato che f è un'affinità[(‡)].

Osserviamo dapprima che è sufficiente dimostrare che

$$(*) \qquad g(\phi(x), \phi(y)) = g(x, y) \quad \text{per ogni coppia di vettori } x, y \in V.$$

Infatti, se è vera $(*)$, allora dati due vettori $v, w \in V$, si ha

$$\begin{aligned} g(\phi(v + w) - \phi(v) - \phi(w), \phi(z)) &= g(\phi(v + w), \phi(z)) - g(\phi(v), \phi(z)) - g(\phi(w), \phi(z)) = \\ &= g(v + w, z) - g(v, z) - g(w, z) = 0 \end{aligned}$$

per ogni vettore $z \in V$ e quindi (ϕ è biiettiva), $\phi(v + w) - \phi(v) - \phi(w) = 0$. Analogamente, dati un vettore $v \in V$ ed una costante $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che

$$g(\phi(\alpha v) - \alpha\phi(v), \phi(z)) = g(\phi(\alpha v), \phi(z)) - \alpha g(\phi(v), \phi(z)) = 0,$$

per ogni vettore $z \in V$ e quindi ϕ è un'applicazione lineare.

Resta quindi da dimostrare $(*)$. Siano quindi $x, y \in V$ due vettori e consideriamo i punti P, $Q = P + y$, $R = P + x$ e $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$, $R' = f(R)$. Dall'osservazione che $R - Q = (R - P) - (Q - P)$, si deduce che

$$\|R - Q\|^2 = g(R - Q, R - Q) = \|R - P\|^2 + \|Q - P\|^2 - 2g(R - P, Q - P)$$

e quindi che

$$\begin{aligned} g(x, y) = g(R - P, Q - P) &= \frac{1}{2}\left(\|R - P\|^2 + \|Q - P\|^2 - \|R - Q\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\|R' - P'\|^2 + \|Q' - P'\|^2 - \|R' - Q'\|^2\right) = g(R' - P', Q' - P') = \\ &= g(\phi(x), \phi(y)). \end{aligned}$$

(*) I punti in questione, ovvero i punti in cui i piani che tagliano circoli sono tangenti alla superficie di $\mathscr{E}$, si dicono i *punti ombelicali* o gli *ombelichi* di $\mathscr{E}$. Vedremo nello svolgimento di (b) che i centri dei circoli in questione stanno su due rette e quindi i punti ombelicali possono esere determinati come intersezione di tali rette con la superficie $\mathscr{E}$.

(†) Per trovare le equazioni della polare s di s_∞, è sufficiente considerare due punti distinti di s_∞ ed intersecare i piani polari di tali punti. Analogamente si può procedere per determinare la polare t di t_∞.

(‡) Ed abbiamo anche mostrato che la definizione di ϕ è indipendente dalla scelta del punto P (perchè?).

Ciò conclude la dimostrazione. A mo' di commento, osserviamo che questo risultato conforta la scelta, fatta nel corso, di mettere in evidenza le affinità tra tutte le possibili trasformazioni dello spazio affine. Inoltre, si osservi che non abbiamo mai usato nel corso della dimostrazione l'ipotesi che lo spazio vettoriale V fosse di dimensione finita e quindi gli stessi argomenti possono essere utilizzati per dimostrare un analogo asserto sugli spazi di Hilbert. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 2x = 0,$$

e se ne determinino l'equazione canonica e gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti.

Svolgimento. Supponiamo che il piano euclideo sia immerso come di consueto nel piano proiettivo, prendendo $x_0 = 0$ come retta impropria. La conica ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A = -5$, $\det A' = 16$. Si tratta quindi di un'ellisse (con punti reali, visto che $\mathcal{C}$ passa per l'origine). Il centro ha coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 16 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ e gli assi sono le due rette $h_1 : 8x - 8y + 1 = 0$ (asse focale) ed $h_2 : 2x + 2y + 1 = 0$. L'equazione canonica è $32X^2 + 128Y^2 = 5$ ed i fuochi hanno coordinate omogenee $F_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -5+\sqrt{15} \\ -3+\sqrt{15} \end{pmatrix}$ ed $F_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -5-\sqrt{15} \\ -3-\sqrt{15} \end{pmatrix}$. Lasciamo al lettore il compito di determinare i quattro vertici della conica. □

ESERCIZIO 10. *Si determinino i punti di intersezione tra le coniche*

$$\mathscr{C} : 2x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0 \qquad e \qquad \mathscr{D} : 3x^2 - 2y^2 - 6x + 2 = 0.$$

Svolgimento. Dobbiamo determinare i punti base del fascio generato da $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, e per fare ciò determiniamo le coniche degeneri di tale fascio. Indicate con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rispettivamente, le matrici di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$; le coniche degeneri corrispondono ai valori dei parametri omogenei (α, β), per cui si ha $\det(\alpha A + \beta B) = 0$. Essendo, $\det(\alpha A + \beta B) = (\alpha + 2\beta)(2\alpha + 3\beta)(\alpha + \beta)$, si ha che le coniche degeneri del fascio hanno equazioni affini

$$y^2 = 1, \qquad x(x-2) = 0, \qquad (x-1)^2 - y^2 = 0;$$

e quindi

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono i punti cercati. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 29 settembre 1998

ESERCIZIO 1. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ una sua base. Dati il vettore $v = v_1 - v_3$ ed il sottospazio $W = \langle v_1 - 2v_3, v_1 - v_2 + 2v_3 \rangle$, si consideri l'applicazione lineare $\pi_v : V \to V$ che proietta ogni vettore di V su W, parallelamente a v.*

(a) Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_v)$.

(b) Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ l'unica applicazione bilineare che rende la base $\mathcal{V}$ ortonormale, si determini l'insieme $\mathscr{C} = \{\, x \in V \mid g(\pi_v(x), \pi_v(x)) = g(x, x) \,\}$.

Svolgimento. (a). Osserviamo che un vettore $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ appartiene al sottospazio W se, e solo se, $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$. Dunque, la proiezione di un generico vettore x su W, è il vettore $\pi_v(x) = x - \alpha v$ ove la costante α va scelta di modo che $x - \alpha v \in W$, cioè soddisfi all'equazione scritta sopra. Dunque, deve aversi $\alpha = 2x_1 + 4x_2 + x_3$, da cui si deduce che

$$(*) \qquad \pi_v(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3) = (-x_1 - 4x_2 - x_3)v_1 + x_2 v_2 + (2x_1 + 4x_2 + 2x_3)v_3$$

e ciò è sufficiente per determinare la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_v) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(b). In base a $(*)$, si ha $g(\pi_v(x), \pi_v(x)) = g(x, x)$ se, e solo se,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + 4x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + (2x_1 + 4x_2 + 2x_3)^2$$

ovvero, $\mathscr{C} : (2x_1 + 4x_2 + x_3)(x_1 + 4x_2 + 2x_3) = 0^{(\dagger)}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Si mostri che l'insieme $\mathscr{U} = \{\, B \in M_3(\mathbb{Q}) \mid \ker B \supseteq \ker A \,\}$ è un sottospazio di $M_3(\mathbb{Q})$ e se ne determini una base.

(b) Si consideri l'applicazione bilineare $M_3(\mathbb{Q}) \times M_3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, definita da $(X, Y) \mapsto \operatorname{tr}(X^t Y)$. Si verifichi che si tratta di un'applicazione simmetrica e non-degenere e si determini il sottospazio $\mathscr{U}^\perp$.

Svolgimento. (a). Ricordando la dualità canonica tra lo spazio delle righe, $M_{1\times 3}(\mathbb{Q})$, e lo spazio delle colonne, $\mathbb{Q}^3 = M_{3\times 1}(\mathbb{Q})$, si può osservare che il sottospazio $\ker A$ di $\mathbb{Q}^3$, altri non è che l'ortogonale del sottospazio di $M_{1\times 3}(\mathbb{Q})$, generato dalle righe della matrice A. In particolare, la matrice A ha rango 2 e le sue ultime due righe sono linearmente indipendenti, quindi $\ker A = \langle (0, 1, -1), (-2, 0, 2) \rangle^\perp$. Inoltre $\ker B \supseteq \ker A$ se, e solo se, l'ortogonale dello spazio generato dalle righe di A è contenuto nell'ortogonale dello spazio generato dalle righe di B. Ciò significa che $\ker B \supseteq \ker A$ se, e solo se, le righe di B sono combinazione lineare delle righe di A; quindi $\mathscr{U}$ è un sottospazio di dimensione 6 di $M_3(\mathbb{Q})$ ed una sua base è data dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b). Si osservi che ${}^t(X^t Y) = Y^t X$; quindi, ricordando che una matrice ha la stessa traccia della sua trasposta, si conclude che l'applicazione bilineare data è simmetrica. Per verificare che è anche non-degenere, basta osservare che $\operatorname{tr}(X^t X) = \sum_{1 \le i,j \le 3} x_{ij}^2$ e quindi che si tratta di un'applicazione bilineare definita positiva.

$^{(\dagger)}$ Dovrebbe essere evidente che i vettori del piano W, venendo proiettati in sè, soddisfano alla condizione $\|\pi_v(x)\| = \|x\|$. Altrimenti, le equazioni dei due piani si possono determinare osservando che $g(x - \alpha v, x - \alpha v) = g(x, x)$ se, e solo se, $\alpha = 0$, oppure $\alpha = \frac{2g(x,v)}{g(v,v)}$; e ricordando che la proiezione di $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ si ottiene per $\alpha = 2x_1 + 4x_2 + x_3$.

Affinchè si abbia $\operatorname{tr}(U^tX) = 0$ per ogni matrice U di $\mathscr{U}$, le colonne della matrice ${}^tX$ devono essere vettori ortogonali a tutte le righe della matrice A, ovvero devono appartenere a $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dunque $\mathscr{U}^\perp$ è un sottospazio di dimensione 3 di $M_3(\mathbb{Q})$ ed i suoi elementi sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix},$$

al variare di α, β, γ in $\mathbb{Q}$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare, simmetrica, degenere, di nucleo N.*

(a) Se W è un sottospazio complementare ad N ($V = N \oplus W$), si mostri che la restrizione di g a W è un'applicazione bilineare (simmetrica) non-degenere.

(b) Siano W e W' due sottospazi complementari ad N e si consideri su entrambi la restrizione di g. Dato comunque un vettore $w \in W$, si mostri che esiste un unico vettore $w' \in W'$ tale che $w - w' \in N$, e che l'applicazione $w \mapsto w'$ così definita, determina un'isometria di W su W'

(c) Nel caso in cui $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$ e g abbia matrice

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si determini N e l'indice di inerzia della restrizione di g al sottospazio $W = \langle v_1 + v_2 - v_4, v_1 + v_3 + v_4, v_2 + v_3 \rangle$

Svolgimento. (a). Sia $w \in W$ tale che $g(w, x) = 0$ per ogni $x \in W$. Allora, dato comunque un vettore $v \in V$, si ha $v = y + n$ con $y \in W$ ed $n \in N$ e quindi $g(w, v) = g(w, y) + g(w, n) = 0$. Dall'arbitrarietà del vettore v si conclude che $w \in W \cap N = (0)$ e quindi che la restrizione di g a w è non-degenere.

(b). Poichè $V = N \oplus W'$, in corrispondenza al vettore $w \in W$ esistono, e sono unici, due vettori $w' \in W'$ ed $n \in N$, tali che $w = w' + n$. Quindi la corrispondenza $\phi : w \mapsto w'$ può essere descritta come l'applicazione composta dall'inclusione $W \to V = N \oplus W'$, seguita dalla proiezione $N \oplus W' \to W'$. Essendo composizione di applicazioni lineari ϕ è quindi un'applicazione lineare; inoltre, dati $w_1, w_2 \in W$, si ha $g(\phi(w_1), \phi(w_2)) = g(w_1 - n_1, w_2 - n_2)$, per opportuni vettori $n_1, n_2 \in N$, e quindi, essendo N il nucleo di g, si ha $g(w_1 - n_1, w_2 - n_2) = g(w_1, w_2)$. Dunque ϕ è un'isometria.

(c). Con un calcolo diretto, si vede che il nucleo di g è il sottospazio $N = \langle v_2 - v_3 - v_4 \rangle$ e si verifica che $V = N \oplus W$. Poichè tutte le restrizioni di g a sottospazi complementari ad N determinano applicazioni bilineari tra loro isometriche, l'indice di inerzia cercato coincide con l'indice di inerzia della restrizione di g a qualsiasi altro complementare W' di N. Per comodità, scegliamo $W' = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, e concludiamo che l'indice cercato è uguale a -1, perchè la restrizione di g al sottospazio $\langle v_1, v_2 \rangle$ è definita negativa, ma non lo è su tutto W', visto che $g(v_3, v_3) = 2$. □

ESERCIZIO 4. *Siano A e B due matrici simmetriche, reali, di ordine n.*

(a) Si mostri che se A è definita positiva, allora esiste una matrice invertibile P tale che ${}^tPAP$ e ${}^tPBP$ siano entrambe matrici diagonali.

(b) Si mostri che esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ siano entrambe matrici diagonali se, e solo se, $AB = BA$.

Svolgimento. (a). Poichè A è definita positiva, esiste una matrice invertibile Q per cui ${}^tQAQ = \mathbf{1}_n$. La matrice ${}^tQBQ = B'$ è ancora una matrice simmetrica e quindi esiste una matrice ortogonale U tale che ${}^tUB'U = \Delta$ sia una matrice diagonale. Quindi, posto $P = QU$, si ha ${}^tPAP = \mathbf{1}_n$ e ${}^tPBP = \Delta$.

(b). Se $A = P\Delta_1 P^{-1}$ e $B = P\Delta_2 P^{-1}$, per due opportune matrici diagonali Δ_1 e Δ_2, allora

$$AB = P\Delta_1\Delta_2 P^{-1} = P\Delta_2\Delta_1 P^{-1} = BA.$$

D'altra parte, se v è un autovettore per la matrice A, relativo all'autovalore a, si ha $A(Bv) = BAv = B(av) = a(Bv)$, e quindi anche Bv è un autovettore di A relativo allo stesso autovalore. Dunque B induce un endomorfismo in ciascuno dei sottospazi di autovettori di A. Poichè B è diagonalizzabile come endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, tale sono anche le sue restrizioni ai sottospazi di autovettori, ad esempio, perchè il polinomio minimo di B è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi delle restrizioni e quindi ciascuno di questi deve avere fattori lineari distinti. Ciò è sufficiente per concludere. □

ESERCIZIO 5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul corpo $\mathbb{Q}$ e si consideri un endomorfismo $\phi : V \to V$, di polinomio minimo $(x-2)^2(x+3)$. Si determinino Il polinomio caratteristico, il polinomo minimo e la matrice di Jordan dell'endomorfismo $L_\phi : Hom_{\mathbb{Q}}(V,V) \to Hom_{\mathbb{Q}}(V,V)$, definito ponendo $L_\phi(\psi) := \phi\circ\psi$.*

Svolgimento. L'endomorfismo ϕ ha matrice di Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ una base di V, per cui $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = J$. Tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \to M_3(\mathbb{Q})$, l'omomorfismo L_ϕ corrisponde all'applicazione $X \mapsto JX$, e per ogni costante $c \in \mathbb{Q}$, l'omomorfismo $L_\phi - c$ corrisponde all'applicazione $X \mapsto (J - c\mathbf{1}_3)X$, al variare di X in $M_3(\mathbb{Q})$. Si verifica quindi con un calcolo diretto che

$$\dim\ker(L_\phi + 3) = 3 = \dim\ker(L_\phi - 2) \quad \text{e} \quad \dim\ker(L_\phi - 2)^2 = 6;$$

e, precisamente:

$$\ker(L_\phi + 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

è lo spazio degli autovettori relativi all'autovalore -3 di L_ϕ;

$$\ker(L_\phi - 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

è lo spazio degli autovettori relativi all'autovalore 2 di L_ϕ; e infine

$$\ker(L_\phi - 2)^2 = \ker(L_\phi - 2) \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dunque il polinomio caratteristico di L_ϕ è $(x-2)^6(x+3)^2$, mentre il polinomio minimo di L_ϕ coincide con il polinomio minimo di ϕ, ovvero con $(x-2)^2(x+3)$. A questo punto è immediato scrivere una matrice di Jordan per L_ϕ. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X+3)^3(X-4)$. Inoltre, si ha

$$A+3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A+3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 28 & -28 \\ 0 & 3 & -21 & 21 \end{pmatrix}, \quad A-4 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che $\mathrm{rk}(A+3) = 2$ e $\mathrm{rk}(A+3)^2 = 1$ e che lo spazio di autovettori relativi all'autovalore 4 è $\langle 3e_4 - 4e_3 \rangle$. Dall'osservazione che $\mathrm{im}(\phi+3) \supset \mathrm{im}(\phi+3)^2 = \ker(\phi-4)$, si conclude che il polinomio minimo è $(X+3)^2(X-4)$; ed inoltre i vettori e_1, $(\phi+3)(e_1) = e_3 + e_4$, $3e_1 + 7e_2 + e_3$ e $3e_4 - 4e_3$, opportunamente riordinati, formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J. Dunque

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7. *Nel piano euclideo si consideri un triangolo equilatero ABC, inscritto in una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro K.*

(a) Si mostri che esiste un'unica parabola $\mathscr{P}$, passante per A, B e K, ed avente asse perpendicolare al segmento AK.

(b) Si mostri che vi è una sola conica degenere reale nel fascio generato da $\mathscr{C}$ e $\mathscr{P}$.

Svolgimento. (a). Non è restrittivo supporre che la circonferenza circoscritta ad ABC abbia raggio unitario e inoltre, possiamo scegliere un riferimento ortonormale in cui $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Allora l'asse della parabola $\mathscr{P}$ è parallelo all'asse orizzontale e, imponendo le condizioni di passaggio per A, B e K, si ottiene l'equazione $\mathscr{P} : 3x - 2\sqrt{3}(y - y^2) = 0$. Ciò risponde completamente alla prima domanda.

(b). Per determinare le coniche degeneri, cerchiamo i quattro punti di intersezione tra $\mathscr{C}$ e $\mathscr{P}$; due dei quali ci sono già noti (A e B). Consideriamo quindi il sistema di quarto grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 3x - 2\sqrt{3}(y - y^2) = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo nella prima equazione l'espressione di x in funzione di y ricavata dalla seconda equazione e tenendo conto dei due punti di intersezione A e B, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}}(y - y^2) \\ (y-1)(2y+1)(2y^2 - 3y + 3) = 0 \end{cases},$$

che ha come soluzioni, oltre ai due punti detti, due punti di coordinate complesse coniugate. Dunque, vi è un'unica coppia di rette reali passante per questi quattro punti. □

ESERCIZIO 8. *Si considerino nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le due rette*

$$r : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \textit{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}.$$

Pensando $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ immerso in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nel modo usuale, si scriva la matrice dell'applicazione proiettiva ϕ : $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, definita proiettando i punti dal centro r sulla retta s. La restrizione di ϕ allo spazio affine è un'applicazione affine?

Svolgimento. Dato un punto $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, la sua proiezione su s, è $\phi(P) = (P + r) \cap s$, e dunque si tratta di un punto se P non è contenuto in r e del vuoto proiettivo altrimenti. Nel primo caso, il piano $P + r$ ha equazione omogenea $P + r : (2p_2 - p_3)(x_0 - x_1 - 2x_2) - (p_0 - p_1 - 2p_2)(2x_2 - x_3) = 0$, e quindi le coordinate omogenee del punto $(P + r) \cap s$ si ottengono risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 + x_3 = 0 \\ (2p_2 - p_3)x_0 + (p_3 - 2p_2)x_1 + 2(p_1 + p_3 - p_0)x_2 - (p_1 + 2p_2 - p_0)x_3 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\phi(P) = \begin{pmatrix} p_0 - p_1 + 2p_2 - 2p_3 \\ p_0 - p_1 + 2p_2 - 2p_3 \\ -p_0 + p_1 + 2p_2 \\ -2p_0 + 2p_1 + 2p_3 \end{pmatrix}.$$

Questa espressione fornisce il risultato corretto anche per i punti contenuti in r, dunque una matrice di ϕ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la restrizione di ϕ allo spazio affine *non* è un'applicazione affine, come si può vedere dalla prima riga di A oppure osservando che, nello spazio affine, la proiezione in questione non è definita su tutti i punti del piano parallelo alle due rette date e passante per la retta r. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 12x^2 - 7xy - 12y^2 + 24x - 7y - 13 = 0,$$

e se ne determinino l'equazione canonica e gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti.

Svolgimento. Si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -26 & 24 & -7 \\ 24 & 24 & -7 \\ -7 & -7 & -24 \end{pmatrix}$$

con $\det A = 50 \cdot 25^2$ e $\det A' = -25^2$. Dunque si tratta di un'iperbole, il cui centro ha coordinate affini $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e gli assi sono le rette $h_1 : (x + 1) + 7y = 0$ (asse focale) ed $h_2 : 7(x + 1) - y = 0$. L'equazione canonica è $X^2 - Y^2 = 2$ ed i fuochi sono i punti di coordinate omogenee $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \pm 7\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 10. *Si determinino tutte le coniche (degeneri e non) circoscritte al quadrilatero di vertici $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a - b \\ a + b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2a - b \\ a + 2b \end{pmatrix}$, al variare di (a, b) nella circonferenza unitaria. Si dica quali tra queste coniche sono ellissi, iperboli o parabole.*

Svolgimento. Al variare di (a,b) nella circonferenza unitaria (cioè con $a^2+b^2=1$), il quadrilatero in questione è un quadrato con un lato tangente alla circonferenza nel vertice (a,b).

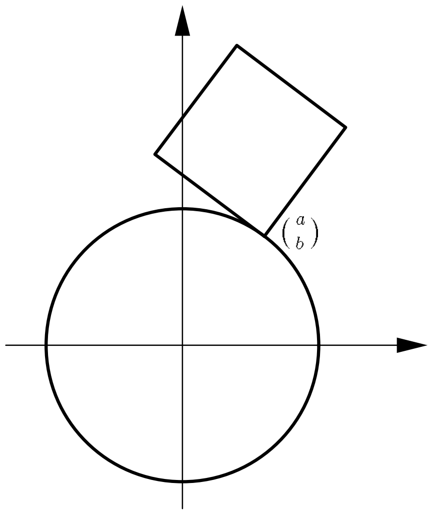
Dobbiamo quindi determinare il fascio di coniche avente i quattro vertici di tale quadrato come punti base. Due coniche degeneri di tale fascio sono le coppie di rette parallele contenenti i lati opposti, ovvero le coniche di equazioni affini

$$(bx-ay)(bx-ay+1)=0,$$
$$(ax+by-1)(ax+by-2)=0.$$

Una generica conica del fascio dato ha quindi matrice

$$\lambda\begin{pmatrix}0 & b & -a\\ b & 2b^2 & -2ab\\ -a & -2ab & 2a^2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4 & -3a & -3b\\ -3a & 2a^2 & 2ab\\ -3b & 2ab & 2b^2\end{pmatrix}$$

al variare dei parametri omogenei (λ,μ).



La classificazione affine di una conica di tale fascio dipende quindi dal segno del minore

$$\det\left[\lambda\begin{pmatrix}2b^2 & -2ab\\ -2ab & 2a^2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2a^2 & 2ab\\ 2ab & 2b^2\end{pmatrix}\right]=4\lambda\mu.$$

Si han quindi ellissi quando λ e μ han segni concordi, iperboli (eventualmente degeneri) quando i segni sono discordi e le due parabole degeneri scritte sopra quando uno dei due parametri si annulla. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 22 febbraio 1999

ESERCIZIO 1. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ dotato della base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, e sia H il sottospazio*

$$H = \langle 2e_1 - e_2 - e_3 - 3e_4 + 2e_5, e_1 + 3e_2 + e_3, 2e_2 + 6e_4 - 4e_5 \rangle .$$

(a) Posto $U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ e $W = \langle e_4, e_5 \rangle$, si mostri che H è il grafico[†] *di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ e si determinino il nucleo, l'immagine e la matrice di ϕ rispetto alle basi date.*

(b) Si consideri il sottospazio $H^\perp$ e si verifichi che si tratta del grafico di un'applicazione lineare $\psi : W^* \to U^*$. Si scriva la matrice di ψ rispetto alle basi duali delle basi date e si mostrino le relazioni tra tale applicazione e l'applicazione trasposta $\phi^* : W^* \to U^*$.

Svolgimento. (a). Un sottospazio $H \subseteq U \oplus W$ è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ se, e solo se, $\dim H = \dim U$ ed $H \cap W = (0)$. Ciò si verifica facilmente nel nostro caso osservando che, indicata con A la matrice le cui colonne sono le coordinate dei generatori del sottospazio H, il determinante della sottomatrice estratta dalle prime tre righe di A è diverso da zero. Con operazioni elementari sulle colonne di A, la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{è equivalente a} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e, considerando questa nuova base di H, si vede che la matrice di ϕ è uguale a $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. In particolare, il nucleo di ϕ è uguale ad $U \cap H = \langle 2e_1 - e_3, 2e_2 + e_3 \rangle$ e l'immagine è il sottospazio $\langle 3e_4 - 2e_5 \rangle$.

(*b*). Indicata con $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_5^*\}$ la base duale della base canonica di $\mathbb{R}^5$, si verifica con un calcolo diretto che

$$H^\perp = \langle 3e_1^* - 3e_2^* + 6e_3^* + e_4^*, -2e_1^* + 2e_2^* - 4e_3^* + e_5^* \rangle .$$

Da ciò si vede che la matrice di ψ rispetto alle basi $\{e_4^*, e_5^*\}$ ed $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ è uguale a $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$. Dunque $\psi = -\phi^*$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Si mostri che l'insieme $\mathcal{U} = \{ B \in M_3(\mathbb{Q}) \mid AB = \mathbf{0} \}$ è un sottospazio di $M_3(\mathbb{Q})$ e se ne determini una base.

(b) Si consideri l'applicazione bilineare $M_3(\mathbb{Q}) \times M_3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, definita da $(X, Y) \mapsto \operatorname{tr}({}^tX \cdot Y)$. Si verifichi che si tratta di un'applicazione simmetrica e non-degenere e si scriva una base del sottospazio $\mathcal{U}^\perp$.

Svolgimento. (a). L'insieme $\mathcal{U}$ è un sottospazio perchè il prodotto di matrici distribuisce rispetto alla somma e commuta con la moltiplicazione per costanti (matrici scalari). In particolare, $AB = 0$ se, e solo se, le

[†] Si ricorda che *grafico* di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ è il sottospazio di $U \oplus W$ formato dai vettori del tipo $u + \phi(u)$, al variare di $u \in U$.

colonne di B sono vettori del nucleo di A. Poichè $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, se ne deduce che una base di $\mathcal{U}$ è costituita dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b). Si osservi che ${}^t({}^tX \cdot Y) = {}^tY \cdot X$; quindi, ricordando che una matrice ha la stessa traccia della sua trasposta, si conclude che l'applicazione bilineare data è simmetrica. Per verificare che è anche non-degenere, basta osservare che $\operatorname{tr}({}^tX \cdot X) = \sum_{1 \le i,j \le 3} x_{ij}^2$ e quindi che si tratta di un'applicazione bilineare definita positiva.

Infine, perchè una matrice X sia ortogonale ad ogni elemento di $\mathcal{U}$, è necessario che le righe di ${}^tX$ siano combinazione lineare delle righe di A. Da ciò si ottiene che una base di $\mathcal{U}^\perp$ è costituita dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data. Si determinino
(a) un sottospazio isotropo massimale di V.
(b) un sottospazio massimale su cui la restrizione di g è definita positiva.
(c) un sottospazio massimale su cui la restrizione di g è definita negativa.

Svolgimento. Da un'ispezione della matrice G, si vede che $H = \langle e_1, e_3 \rangle$ è un sottospazio isotropo di dimensione 2 e quindi massimale. Inoltre, $U_+ = \langle e_2, e_4 \rangle$ è un sottospazio di dimensione 2 su cui la restrizione di g è definita positiva ed è necessariamente massimale, perchè ogni spazio di dimensione maggiore interseca H e quindi contiene vettori isotropi non nulli. Infine, per il Teorema di Sylvester, il sottospazio $U_- = U_+^\perp = \langle 2e_1 + 5e_3 - 6e_4, 2e_2 + e_3 + 4e_4 \rangle$ è un sottospazio massimale su cui la restrizione di g è definita negativa. □

ESERCIZIO 4. *Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere. Sia H un sottospazio isotropo massimale, di dimensione $h < \frac{n}{2}$, e si scriva $H^\perp = H \oplus W$, ove W è un qualsiasi complementare di H in $H^\perp$.*
(a) È vero o falso che la restrizione di g a W è un'applicazione bilineare definita (positiva o negativa)?
(b) È vero o falso che l'indice di inerzia di g coincide con l'indice di inerzia della restrizione di g a W?
(c) Si calcoli $i(g)$ nel caso in cui $n = 8$, $h = 3$ ed $i(g) < 0$.

Svolgimento. (a). Se il sottospazio $W \subset H^\perp$ contenesse un vettore isotropo non nullo w, si avrebbe che il sottospazio $H \oplus \langle w \rangle$ sarebbe un sottospazio isotropo, contenente propriamente H, contro l'ipotesi che quest'ultimo sia un sottospazio isotropo massimale. Dunque, W non può contenere vettori isotropi non-nulli e ciò significa esattamente che la restrizione di g a W è un'applicazione bilineare definita, positiva o negativa.

(b). È vero. Si osservi che $\dim W = \dim H^\perp - \dim H = n - 2h$, e quindi $\dim W^\perp = 2h$. Inoltre, per il teorema di decomposizione ortogonale, si ha $V = W \oplus W^\perp$ e quindi $i(g) = i(g_{|W}) + i(g_{|W^\perp})$. A questo punto, basta osservare che il sottospazio $W^\perp$ contiene il sottospazio isotropo H, di dimensione h, per concludere che $i(g_{|W^\perp}) = 0$.

(c). Per quanto visto nei punti precedenti, $\dim W = 2$ ed essendo $i(g) < 0$, la restrizione di g a W è un'applicazione bilineare definita negativa. Dunque, si conclude che $i(g) = i(g_{|W}) = -2$. □

ESERCIZIO 5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la matrice di Jordan di tutti gli endomorfismi ϕ di V soddisfacenti alle condizioni:*

$$\dim ker(\phi - 5) = 2 < \dim ker(\phi - 5)^2 < \dim ker(\phi - 5)^3 = 4,$$
$$\dim ker(\phi + 2) = 2 < \dim ker(\phi + 2)^4 = 4, \qquad \dim im\phi = 8.$$

Svolgimento. Un endomorfismo $\phi : V \to V$, soddisfacente alle condizioni poste, deve avere come autovalori -2, 0 e 5, con molteplicità 4, 2 e 4 rispettivamente. Dunque, il suo polinomio caratteristico è uguale a

$$p_\phi(x) = x^2(x+2)^4(x-5)^4.$$

Per il polinomio minimo di un tale ϕ vi sono due possibilità compatibili con tutte le condizioni poste; ovvero

$$\lambda(x) = x(x+2)^2(x-5)^3 \qquad \text{e} \qquad \lambda'(x) = x(x+2)^3(x-5)^3.$$

Le matrici di Jordan, scritte a blocchi, che corrispondono ai diversi polinomi minimi sono, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} J_{-2} & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 \\ 0 & 0 & J_5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} J'_{-2} & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 \\ 0 & 0 & J_5 \end{pmatrix},$$

ove

$$J_5 = \begin{pmatrix} 5&0&0&0 \\ 0&5&1&0 \\ 0&0&5&1 \\ 0&0&0&5 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&0 \end{pmatrix}, \quad J_{-2} = \begin{pmatrix} -2&1&0&0 \\ 0&-2&0&0 \\ 0&0&-2&1 \\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}, \quad J'_{-2} = \begin{pmatrix} -2&0&0&0 \\ 0&-2&1&0 \\ 0&0&-2&1 \\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, a meno di similitudine, vi sono solo due endomorfismi di V soddisfacenti alle condizioni date. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & -5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X+2)^4$. Inoltre, si ha

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A+2)^2 = \mathbf{0},$$

da cui si vede che il polinomio minimo è $(X+2)^2$ e che $\mathrm{rk}\,(A+2) = 2$. Dunque i vettori e_1, $(\phi+2)(e_1) = e_3 + 3e_4$, e_2 e $(\phi+2)(e_2) = 3e_1 - e_3$, opportunamente riordinati, formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J. Dunque le matrici

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo di dimensione 4, si considerino i tre punti di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

rispetto ad un riferimento ortonormale.
(a) Si determinino le equazioni cartesiane del piano σ, contenente i tre punti.
(b) Si determini l'area del triangolo PQR.

Svolgimento. (a). Il piano in questione è parallelo ai vettori $v = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = R - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e passa per uno qualsiasi dei tre punti dati. Dunque, essendo $\langle v, w\rangle^{\perp} = \langle n_1, n_2\rangle$, ove $n_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $n_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, si conclude che le equazioni del piano cercato sono

$$\sigma : \begin{cases} x_2 = 0 \\ 5x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}.$$

(b). I due vettori n_1, $n_2' = \frac{n_2}{\|n_2\|}$ sono ortogonali al piano σ, sono ortogonali tra loro, ed hanno lunghezza 1, dunque l'area cercata coincide con la metà del volume determinato dai quattro vettori v, w, n_1, n_2'. Dunque l'area cercata è uguale ad

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5\sqrt{2}} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 8. *Si considerino nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il punto $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed il piano $\pi : 2x - 3y + z = 1$.*

(a) Pensando $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ immerso in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nel modo usuale, si scriva la matrice dell'applicazione proiettiva ϕ, definita proiettando i punti dal centro C sul piano π.
(b) Si determini un piano π' in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ affinché la restrizione di ϕ allo spazio affine complementare sia un'applicazione affine.

Svolgimento. (a). Pensando $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ immerso in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nel modo usuale, il punto C ha coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed il piano π ha equazione omogenea $\pi : x_0 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. Dato un generico punto $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ $(\neq C)$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, i punti della retta $P + C$ hanno coordinate omogenee $\begin{pmatrix} \alpha + \beta p_0 \\ 3\alpha + \beta p_1 \\ \alpha + \beta p_2 \\ \beta p_3 \end{pmatrix}$ e quindi il punto di intersezione $(P+C)\cap\pi$ si ottiene per $\beta=2$ ed $\alpha=p_0-2p_1+3p_2-p_3$ e le coordinate omogenee di $\phi(P)$ sono

$$\begin{pmatrix} 3p_0-2p_1+3p_2-p_3 \\ 3p_0-4p_1+9p_2-3p_3 \\ p_0-2p_1+5p_2-p_3 \\ 2p_3 \end{pmatrix}.$$

Da ciò si conclude che la matrice dell'applicazione proiettiva è

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b). La restrizione di ϕ all'usuale spazio affine (il complementare di $x_0=0$) non è un'applicazione affine, ad esempio perchè il punto C viene trasformato da ϕ nel vuoto proiettivo e quindi non ha immagine nello spazio affine. Inoltre, ogni punto del piano affine $\pi' : 2x-3y+z=3$, parallelo a π e passante per C, viene mandato da ϕ in un punto improprio di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Per fare in modo che la restrizione di ϕ sia un'applicazione affine, possiamo quindi prendere come piano improprio il piano $\pi' : 3x_0-2x_1+3x_2-x_3=0$. Infatti, preso un punto P che non stia su π', la retta $P+C$ non è contenuta in π' e quindi deve intersecare il piano π in un punto proprio (cioè non in un punto di $\pi\cap\pi'$).

Più in generale, ogni piano passante per C può essere preso come piano improprio; il piano scelto ha la specialità di mantenere al finito tutti i punti di π che erano al finito nello spazio affine usuale, ovvero, indicato con σ il piano $x_0=0$, si ha $\pi\cap\pi'=\pi\cap\sigma$. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 3x^2+6xy+3y^2-4x-2y=0,$$

e se ne determinino l'equazione canonica e gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti.

Svolgimento. Si tratta della conica di matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

con $\det A=-3$ e $\det A'=0$. Dunque si tratta di una parabola, il cui asse è parallelo alla retta $x+y=0$ e quindi è la polare della direzione ortogonale a tale retta, ovvero del punto improprio $Q_\infty=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. L'asse di $\mathcal{C}$ è quindi $h : 2x+2y=1$ che interseca la conica nel vertice $V=\begin{pmatrix}-1/8\\5/8\end{pmatrix}$. L'equazione canonica è $2Y=6\sqrt{2}X^2$ ed il fuoco ha coordinate omogenee $\begin{pmatrix}12\\-1\\7\end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 10. *Si determinino tutte le coniche (degeneri e non) tangenti alle due circonferenze*

$$\mathcal{C}_1 : x^2+(y+2)^2=4 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}_2 : (x-3)^2+y^2=1$$

rispettivamente nei punti $P_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e $P_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Si dica quali tra queste coniche sono ellissi, iperboli, parabole o degeneri.

Svolgimento. La retta tangente a $\mathcal{C}_1$ in P_1 ha equazione $r_1 : y = 0$, e la retta tangente a $\mathcal{C}_2$ in P_2 ha equazione $r_2 : y = 1$, quindi le coniche cercate sono quelle del fascio di coniche tangenti ad r_1 ed r_2 in P_1 e P_2 e quindi le coniche degeneri di tale fascio sono, la coppia di rette $r_1 r_2$ e la retta $P_1 + P_2$ con molteplicità 2. Dunque le coniche del fascio hanno equazioni

$$\lambda(y^2 - y) + \mu(3y - x)^2 = 0$$

al variare dei parametri omogenei (λ, μ), e le corrispondenti matrici sono

$$A_{(\lambda,\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 2\mu & -6\mu \\ -\lambda & -6\mu & 2\lambda + 18\mu \end{pmatrix}.$$

Da ciò si conclude che le coniche degeneri del fascio sono solo le due coniche date, ovvero quelle che si determinano per $\lambda = 0$, oppure $\mu = 0$. Se $\lambda\mu \neq 0$, si ha un'ellisse se i segni di λ e μ sono concordi, mentre si ha un'iperbole altrimenti. Non vi sono parabole non-degeneri nel fascio. $\square$