Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 14 giugno 1999

ESERCIZIO 1. *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^6$ ed indichiamo con $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_6\}$ la base canonica. Sia H il sottospazio*

$$H = \langle 2e_1 - e_2 + e_3 + 1e_5 + 2e_6, e_1 - e_2 - e_4 + 2e_5 + 3e_6, e_2 + 2e_4 - 3e_6 \rangle .$$

(a) Posto $U = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ e $W = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle$, si mostri che H è il grafico(†) *di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ e si determini la matrice di ϕ rispetto alle basi date.*

(b) Si descrivano tutte le applicazioni bilineari, alternanti e non degeneri, $h : V \times V \to \mathbb{R}$ per cui i tre sottospazi U, W ed H sono isotropi e si scriva la matrice rispetto alla base canonica di una tale h.

Svolgimento. (a). Un sottospazio $H \subseteq U \oplus W$ è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ se, e solo se, $\dim H = \dim U$ ed $H \cap W = (0)$. Indicata con A la matrice le cui colonne sono le coordinate dei generatori del sottospazio H, il determinante della sottomatrice estratta dalle prime tre righe di A è diverso da zero da cui si deduce che $\dim H = 3 = \dim U$ e $H + W = V$, e quindi H è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$. Con operazioni elementari sulle colonne, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{è equivalente ad} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

e, considerando questa nuova base di H, si vede che la matrice di ϕ è uguale a $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(b). Un'applicazione bilineare, alternante e non degenere, $h : V \times V \to \mathbb{R}$ per cui i sottospazi U e W siano isotropi, deve avere una matrice rispetto alla base canonica del tipo $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} & T \\ -{}^tT & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$, ove T è una matrice quadrata, invertibile, di ordine 3. Inoltre, affinchè H sia un sottospazio isotropo, deve aversi

$$(\mathbf{1}, {}^tB) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & T \\ -{}^tT & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \qquad \text{ovvero} \qquad TB - {}^tB{}^tT = \mathbf{0}.$$

Ciò significa che una tale applicazione esiste se, e solo se, esiste una matrice invertibile T tale che il prodotto TB sia una matrice simmetrica(*). Poichè B è una matrice simmetrica, è sufficiente che T sia una matrice simmetrica e invertibile che commuta con B; ad esempio $T = \mathbf{1}$ e questo permette di scrivere la matrice di una possibile h. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino gli spazi vettoriali U, V, W, Z, di dimensione finita sul corpo C, e le applicazioni lineari*

$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \xrightarrow{\gamma} Z.$$

(†) Si ricorda che *grafico* di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ è il sottospazio di $U \oplus W$ formato dai vettori del tipo $u + \phi(u)$, al variare di $u \in U$.

(*) Scrivendo esplicitamente le entrate dei due prodotti TB e $B{}^tT$ in termini delle entrate t_{ij} della matrice T, si vede che le entrate t_{ij} della matrice T devono essere soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2t_{11} - 3t_{13} = t_{21} + 2t_{22} \\ -3t_{12} - t_{13} = t_{21} + 2t_{32} \\ -3t_{22} - t_{23} = 2t_{31} - 3t_{33} \end{cases}$$

ed ogni altra condizione risulta dipendente da queste, a parte l'invertibilità di T.

Si mostri che
(a) $rk(\gamma\circ\beta) + rk(\beta\circ\alpha) \le rk\beta + rk(\gamma\circ\beta\circ\alpha)$;
(b) $rk\alpha + rk\beta - \dim V \le rk(\beta\circ\alpha) \le \min\{rk\alpha, rk\beta\}$.

Svolgimento. (a). Ricordando la relazione fondamentale tra le dimensioni del nucleo e dell'immagine di un'applicazione lineare, si vede facilmente che la disuguaglianza in questione è equivalente alla disuguaglianza

$$(*)\qquad \dim\ker(\gamma\circ\beta) + \dim\ker(\beta\circ\alpha) \ge \dim\ker\beta + \dim\ker(\gamma\circ\beta\circ\alpha).$$

Si osservi ora che $\ker(\gamma\circ\beta) = \beta^{-1}(\ker\gamma\cap\mathrm{im}\beta)$ e quindi

$$\dim\ker(\gamma\circ\beta) = \dim\ker\beta + \dim(\ker\gamma\cap\mathrm{im}\beta).$$

Analogamente, considerando l'applicazione composta $\gamma\circ(\beta\circ\alpha)$, si ricava l'uguaglianza

$$\dim\ker(\gamma\circ(\beta\circ\alpha)) = \dim\ker(\beta\circ\alpha) + \dim(\ker\gamma\cap\mathrm{im}(\beta\circ\alpha)).$$

Mettendo insieme le due uguaglianze, si ricava quindi

$$\begin{aligned}\dim\ker(\gamma\circ\beta) + \dim\ker(\beta\circ\alpha) &=\\ &= \dim\ker\beta + \dim(\ker\gamma\cap\mathrm{im}\beta) + \dim\ker(\gamma\circ(\beta\circ\alpha)) - \dim(\ker\gamma\cap\mathrm{im}(\beta\circ\alpha)) \ge\\ &\ge \dim\ker\beta + \dim\ker(\gamma\circ\beta\circ\alpha),\end{aligned}$$

perchè $\mathrm{im}\beta \supseteq \mathrm{im}(\beta\circ\alpha)$; e ciò dimostra $(*)$.
(b). Si osservi che la prima delle due disuguaglianze si ottiene dalla disuguaglianza del punto (a) per i morfismi

$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\mathbf{1}_V} V \xrightarrow{\beta} W,$$

mentre la seconda disuguaglianza discende direttamente dall'osservazione $\mathrm{im}(\beta\circ\alpha) = \mathrm{im}(\beta|_{\mathrm{im}\,\alpha})$. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare $g : V\times V \to \mathbb{R}$ di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3\\ -1 & 5 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data. Si determini, se esiste, una base rispetto a cui g abbia matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. Da un'ispezione della matrice G, si vede che $H = \langle v_1, v_3\rangle$ è un sottospazio isotropo di dimensione 2 e quindi massimale. Dunque $i(g) = 0$ ed esiste una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispetto a cui g abbia matrice H. Poniamo quindi $w_1 = v_1$ e $w_2 = v_3$ ed osserviamo che il vettore w_3 deve appartenere al sottospazio $\langle w_2\rangle^\perp = \langle v_1, v_3, v_4\rangle$, essere isotropo e soddisfare alla condizione $g(w_3, w_1) = 1$. Ora $g(v_4 + av_1, v_4 + av_1) = 1 + 6a$ e quindi $v_4 - \frac{1}{6}v_1$ è un vettore isotropo in $\langle w_2\rangle^\perp$ e si ha $g(v_4 - \frac{1}{6}v_1, v_1) = g(v_4, v_1) = 3$. Dunque, poniamo $w_3 = \frac{1}{3}(v_4 - \frac{1}{6}v_1)$. Il vettore w_4 deve appartenere al sottospazio $\langle w_1, w_3\rangle^\perp = \langle v_3, 5v_1 + 9v_2 + 3v_4\rangle$, essere isotropo e soddisfare alla condizione $g(w_4, w_2) = 1$. Ora $g(bv_3 + (5v_1 + 9v_2 + 3v_4), bv_3 + (5v_1 + 9v_2 + 3v_4)) = 306 - 36b$ e quindi $\frac{17}{2}v_3 + (5v_1 + 9v_2 + 3v_4)$ è un vettore isotropo in $\langle w_1, w_3\rangle^\perp$ e si ha $g(\frac{17}{2}v_3+(5v_1+9v_2+3v_4), v_3) = -18$. Dunque, posto $w_4 = -\frac{1}{36}(10v_1+18v_2+17v_3+6v_4)$, abbiamo completato la base cercata. □

ESERCIZIO 4. *Si indichi con $g : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica $q(x) = 2x_1x_6 + 2x_2x_5 + 5x_3^2 - x_4^2$. Si dica se g è non-degenere e si determini la dimensione di un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^6$.*

Svolgimento. Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_6\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^6$. Rispetto a tale base, l'applicazione bilineare g ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\det A = -5$; quindi g è non-degenere. Inoltre, se si considerano i due sottospazi $U = \langle e_1, e_2, e_5, e_6\rangle$ e $W = \langle e_3, e_4\rangle$, allora $\mathbb{R}^6 = U \oplus W$ ed i due spazi sono tra loro ortogonali. Inoltre la restrizione di g a ciascuno dei due spazi è non-degenere. L'indice di inerzia di g è somma degli indici di inerzia delle sue restrizioni ad U e W e perciò $i(g) = 0$ e quindi un sottospazio isotropo massimale di $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 3. Un tale sottospazio è, ad esempio, $I = \langle e_1, e_2, e_3 + \sqrt{5}e_4\rangle$. □

ESERCIZIO 5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione N sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo avente tutti gli autovalori reali e soddisfacente alla condizione $\phi^k = \mathbf{1}_V$ per qualche intero positivo k. Si mostri che ϕ è diagonalizzabile e $\phi^2 = \mathbf{1}_V$.*

Svolgimento. Il polinomio minimo $\lambda_\phi(X)$ di ϕ deve dividere $X^k - 1$ ed avere tutte le radici reali. Ciò significa che $\lambda_\phi(X)$ divide $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ (in particolare, divide $X - 1$ se k è dispari). Dunque il polinomio minimo di ϕ è prodotto di fattori lineari distinti e quindi ϕ è diagonalizzabile. L'ultima condizione discende dal fatto che $\lambda_\phi(X)$ divide $X^2 - 1$ (in particolare, $\phi = \mathbf{1}_V$ se k è dispari). □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X-3)^4$. Inoltre, si ha

$$A - 3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad (A-3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad (A-3)^3 = \mathbf{0}$$

da cui si vede che il polinomio minimo è $(X-3)^3$, $\mathrm{rk}(A-3) = 2$ e $\mathrm{rk}(A-3)^2 = 1$. Dunque i vettori $v_1 = e_1 + e_4$, $v_2 = (\phi-3)^2(e_3) = 5e_2 - 10e_4$, $v_3 = (\phi-3)(e_3) = 3e_1 - e_2$ e $v_4 = e_3$ formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J. Dunque le matrici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo orientato di dimensione 3, si consideri l'affinità f, di matrice*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

rispetto ad un riferimento ortonormale, concorde con l'orientamento fissato. Si mostri che f è una rotazione e si determinino l'asse e l'angolo di rotazione.

Svolgimento. La matrice ottenuta da R cancellando la prima riga e la prima colonna è una matrice ortogonale di ordine 3 e quindi f è un'isometria dello spazio euclideo e si ha $\det R = 1$ e quindi f è una rotazione. L'asse è il luogo dei punti uniti ($f(X) = X$) e quindi è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{che è equivalente a} \qquad \begin{cases} 2x - 4z + 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

e ci dà così l'equazione dell'asse di rotazione h. Un vettore ortogonale ad h è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che viene mandato nel suo opposto da R e quindi f è una rotazione di un'angolo piatto. □

ESERCIZIO 8. *Si considerino nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la curva $\mathcal{C}$ e la retta r di equazioni*

$$\mathcal{C} : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}.$$

(a) *Si scriva l'equazione del cono $\mathcal{Q}$, avente come vertice il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e che taglia la curva $\mathcal{C}$ nel piano $\pi : z = 0$.*

(b) *Si classifichino dal punto di vista affine le intersezioni tra $\mathcal{Q}$ ed i piani del fascio di asse r.*

Svolgimento. (a). Sia $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un generico punto di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. I punti della retta $P + X$ hanno coordinate del tipo $\begin{pmatrix} 2 + \lambda(x_0 - 2) \\ \lambda y_0 \\ 2 + \lambda(z_0 - 2) \end{pmatrix}$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e l'intersezione di $P + X$ col piano π si ottiene per $\lambda = \frac{2}{2 - z_0}$ ($z_0 \neq 2$). Tale intersezione è un punto della curva $\mathcal{C}$ se, e solo se, le sue coordinate soddisfano alle equazioni che definiscono tale curva e quindi il cono cercato ha equazione $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - xz - 2x + 2z = 0$ (ed è perciò un cono quadrico).

(b). Consideriamo lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ immerso nel modo usuale nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ed utilizziamo coordinate omogenee. L'intersezione tra $\mathcal{Q}$ ed i piani del fascio in questione sono delle coniche, che sono quindi completamente classificate dal punto di vista affine, dalla loro intersezione con il piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$. Il generico piano del fascio di asse r ha equazione $\pi_{(\lambda,\mu)} : \lambda(x_1 - 4x_0) + \mu(x_3 - 4x_0) = 0$, al variare dei parametri omogenei (λ, μ); quindi dobbiamo studiare le soluzioni del sistema

$$\pi_\infty \cap \pi_{(\lambda,\mu)} \cap \mathcal{Q} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_3 = 0 \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_3 = 0 \\ (\mu + \lambda) x_1^2 + \mu x_2^2 = 0 \end{cases},$$

al variare dei parametri omogenei (λ, μ). Per $\mu = 0$, si ottiene la curva $\begin{cases} x_1 = 4x_0 \\ x_2^2 - 4x_0(x_3 - 4x_0) = 0 \end{cases}$, che è una parabola, non degenere, con l'asse parallelo all'asse z. Dunque, possiamo supporre $\mu \neq 0$ e considerare il parametro non omogeneo $t = \frac{\lambda}{\mu}$. Considerando il segno del coefficiente $1 + t$, possiamo quindi concludere che si ha un'ellisse per $t > -1$ ed un'iperbole per $t < -1$; per $t = -1$ si ottiene una conica degenere, perchè il piano contiene il vertice del cono, precisamente si ha la retta $s : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, con molteplicità 2. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y = 0,$$

e se ne determinino l'equazione canonica e gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti. Si tracci un disegno indicativo di $\mathcal{C}$.

Svolgimento. Si tratta della conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

con $\det A = -24$ e $\det A' = -1$. Dunque si tratta di un'iperbole. Le direzioni degli asintoti sono le intersezioni tra $\mathcal{C}$ e la retta impropria e gli asintoti sono le polari, a_1 ed a_2, di tali punti, che si incontrano nel centro C di $\mathcal{C}$. Si ha quindi

$$a_1 : x + y = 3, \qquad a_2 : 2x + y = -4, \qquad C = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A' sono $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10}$, a cui corrispondono gli autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{10} \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{10} \\ 3 \end{pmatrix}$. Dunque, l'equazione canonica dell'iperbole $\mathcal{C}$ è

$$\frac{\sqrt{10} - 3}{24} X^2 - \frac{\sqrt{10} + 3}{24} Y^2 = 1,$$

ed i suoi assi sono le due rette

$$h_1 : (1 - \sqrt{10})y - 3x = 31 - 10\sqrt{10} \quad \text{(asse focale)} \qquad h_2 : (1 + \sqrt{10})y - 3x = 31 + 10\sqrt{10}.$$

Dai coefficienti dell'equazione canonica si possono ricavare (come?) le distanze dei fuochi e dei vertici dal centro di $\mathcal{C}$ e quindi consideriamo conclusa la discussione. □

ESERCIZIO 10. *Sia $\mathcal{C}$ un'ellisse (non degenere) del piano euclideo e sia C il suo centro. Dato un punto $P \neq C$ del piano, si consideri il punto $P' = (P + C) \cap \pi_{\mathcal{C}}(P)$, ove $\pi_{\mathcal{C}}(P)$ indica la retta polare di P.*

(a) Si mostri che la corrispondenza $P \mapsto P'$ è ben definita ed ha periodo 2.

(b) Nel caso in cui $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ (riferimento ortonormale), si scrivano esplicitamente le coordinate del punto P' in funzione delle coordinate del punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Inoltre, si mostri che ogni retta verticale $x = c$ ($c \neq 0$) viene trasformata da questa corrispondenza in una circonferenza passante per C e se ne determinino centro e raggio.

Svolgimento. (a). Dato un punto $P \neq C$ del piano affine, si ha $(P + C) \neq \pi_{\mathcal{C}}(P)$, perchè ogni retta per il centro ha il polo sulla retta impropria (polare del centro). Inoltre, le due rette si incontrano in un punto del piano affine, perchè altrimenti, il punto improprio di $P + C$ apparterrebbe alla propria polare e sarebbe quindi un punto reale di $\mathcal{C}$ sulla retta impropria, e ciò non è possibile, perchè $\mathcal{C}$ è un'ellisse. Osserviamo infine che P' è un punto della retta $P+C$ diverso da C (perchè?); quindi $P+C = P'+C$ e, poichè P' è un punto della polare di P, la sua polare passa per P e quindi P è l'intersezione tra $P'+C$ e $\pi_{\mathcal{C}}(P')$[(†)].

(b). Fissato il punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i punti della retta $P+C$ hanno coordinate $\begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{pmatrix}$, al variare di λ in $\mathbb{R}$. Un tale punto appartiene alla polare di P se, e solo se,

$$(1, x_0, y_0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{pmatrix} = 0;$$

ovvero se, e solo se, $\lambda(x_0^2 + y_0^2) - 1 = 0$. Ciò significa che la corrispondenza si può scrivere esplicitamente nella forma

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto P' = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} \\ \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} \end{pmatrix}.$$

Dunque, i punti della retta verticale $x = c$ vengono trasformati nei punti di $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{c}{c^2+t^2} \\ \frac{t}{c^2+t^2} \end{pmatrix} \,|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ ed, in particolare, si ha

$$\left(\frac{c}{c^2+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{c^2+t^2}\right)^2 = \frac{1}{c^2+t^2} = 2\frac{1}{2c}\left(\frac{c}{c^2+t^2}\right),$$

da cui si deduce che

$$\left(\frac{c}{c^2+t^2} - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(\frac{t}{c^2+t^2}\right)^2 = \frac{1}{4c^2},$$

ovvero che tutti i punti di S appartengono alla circonferenza di centro $\begin{pmatrix} \frac{1}{2c} \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio $\frac{1}{2c}$. In particolare, a partire dai punti della retta, si ottengono in tal modo tutti i punti della circonferenza, ad eccezione del punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che non è nell'immagine della corrispondenza data. $\square$

(†) Esercizio per il lettore: si scelga un riferimento (ortonormale) del piano euclideo i cui assi coincidano con gli assi di $\mathcal{C}$ e si supponga che l'ellisse abbia equazione $ax^2 + by^2 = 1$, con $a > 0 < b$. Si scrivano quindi esplicitamente le coordinate del punto P' in funzione delle coordinate del punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 28 giugno 1999

ESERCIZIO 1. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si determinino le dimensioni dei sottospazi

$$R = \{ X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, AX = \mathbf{0} \} \qquad ed \qquad L = \{ Y \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, YA = \mathbf{0} \}$$

e si scriva una base per ciascuno di tali sottospazi.

Svolgimento. Affinchè una matrice X stia nel sottospazio R, le sue colonne devono essere elementi del nucleo di A. Poichè A ha rango 2, il suo nucleo ha dimensione 1 ed una base di tale nucleo è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque una base di R è costituita dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

da cui si conclude che $\dim_{\mathbb{R}} R = 3$.

Affinchè una matrice X stia nel sottospazio L, le sue righe devono essere ortogonali all'immagine di A. Poichè A ha rango 2, l'ortogonale dell'immagine ha dimensione 1 ed una base di tale sottospazio è costituita dal vettore $(3, 0, -1)$. Dunque una base di L è costituita dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

da cui si conclude che $\dim_{\mathbb{R}} L = 3$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri lo spazio vettoriale reale* $V = \{ P(X) \in \mathbb{R}[X] \,|\, \deg P < 4 \}$ *e la funzione* $q : V \to \mathbb{R}$, *definita ponendo* $q(P) = \int_0^1 P(x)^2 \, dx$.

(a) *Si verifichi che q è una forma quadratica su V.*

(b) *Detta g l'applicazione bilineare simmetrica su V associata a q, si determini una base del sottospazio* $\langle 1 \rangle^{\perp}$.

Svolgimento. (a). È chiaro che, per qualunque numero reale α, si ha

$$q(\alpha P) = \int_0^1 [\alpha P(x)]^2 \, dx = \alpha^2 \int_0^1 P(x)^2 \, dx = \alpha^2 q(P);$$

inoltre, l'applicazione $g : V \times V \to \mathbb{R}$, definita da

$$(P, Q) \mapsto q(P + Q) - q(P) - q(Q) = 2 \int_0^1 P(x)Q(x) \, dx,$$

è bilineare e simmetrica per la commutatività del prodotto e la linearità dell'integrale. Dunque q è una forma quadratica.

(b). Dobbiamo determinare il sottospazio $\langle 1\rangle^{\perp} = \{\, P(X) \in V \mid g(P,1) = 0\,\}$, ovvero i polinomi $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, per cui $2\int_0^1 P(x)1\,dx = 0$. Osservando che

$$\int_0^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\,dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4},$$

si conclude che una base di $\langle 1\rangle^{\perp}$ è costituita dai polinomi $1-2X$, $1-3X^2$, $1-4X^3$. □

ESERCIZIO 3. *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

Si consideri ora lo spazio vettoriale reale W con l'applicazione bilineare $h : W \times W \to \mathbb{R}$ di matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

Si dica se esiste un'isometria $\phi : W \to V$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice di una tale ϕ rispetto alle basi date.

Svolgimento. L'applicazione bilineare g è non degenere, essendo $\det G = -7$ ed osserviamo che può esistere un'isometria tra i due spazi se, e solo se, $i(g) = 0$. Questo non è possibile, perchè tutte le matrici di applicazioni bilineari su V con $i(g) = 0$ sono congruenti alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed hanno quindi determinante positivo. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, ed i tre sottospazi*

$$U_1 = \langle e_1, e_2\rangle, \qquad U_2 = \langle e_1 + e_3, 2e_1 + e_4\rangle, \qquad U_3 = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_4\rangle.$$

Si determini, se esiste, un'applicazione bilineare simmetrica, non degenere, $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ per cui i tre sottospazi siano tutti e tre isotropi, e si abbia $g(e_1, e_4) = 1$.

Svolgimento. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

la matrice di un'applicazione bilineare simmetrica, rispetto alla base canonica. Affinchè i tre sottospazi dati siano isotropi, deve aversi

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = 0 \\ a_{22} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0 \\ 2a_{11} + 2a_{13} + a_{14} + a_{34} = 0 \\ 4a_{11} + 4a_{14} + a_{44} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_{11} - 2a_{13} + a_{33} = 0 \\ a_{12} - a_{23} - a_{14} + a_{34} = 0 \\ a_{22} - 2a_{24} + a_{44} = 0 \end{cases},$$

rispettivamente. Unendo le varie equazioni, si ottiene un sistema di 9 equazioni lineari omogenee, di rango 9, avente come incognite le 10 entrate indipendenti della matrice simmetrica A. Un tale sistema ha infinite soluzioni, tutte proporzionali tra loro, e la condizione $g(e_1, e_4) = 1$ determina univocamente la matrice di g, che è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia fissato un endomorfismo $\phi : V \to V$. Dato un sottoinsieme $S \subseteq V$, si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{Q}[X]$*

$$J_S = \{ f(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid f(\phi)(v) = 0, \text{ per ogni } v \in S \}.$$

(a) Si mostri che J_S è un ideale di $\mathbb{Q}[X]$ e che, dati due vettori v, w in V, si ha $J_{\langle v,w \rangle} = J_v \cap J_w$.

(b) Sia, come di consueto, $J_\phi = \{ f(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid f(\phi) = \mathbf{0} \}$. Si mostri che $J_\phi = \bigcap_{v \in V} J_v$ e che esiste un vettore $v_0 \in V$ tale che $J_{v_0} = J_\phi$.

Svolgimento. (a). Un polinomio $f(X)$ appartiene a J_S se, e solo se, l'insieme S è contenuto nel nucleo dell'endomorfismo $f(\phi)$ e quindi è immediato verificare che la differenza di due elementi di J_S ed il prodotto di un qualunque polinomio per un elemento di J_S producono ancora elementi di J_S. In particolare, dall'osservazione fatta, discende che $J_S = J_{\langle S \rangle}$, perchè il nucleo di un endomorfismo è un sottospazio. In base a questo ed all'ovvia osservazione che $J_{\{v,w\}} = J_v \cap J_w$ si conclude la verifica di quanto richiesto.

(b). Dal punto precedente, discende che $J_\phi = \bigcap_{v \in V} J_v$ dato che, per ogni $f(X) \in J_\phi$, si ha $f(\phi)(v) = 0$ per ogni $v \in V$. Sia $\lambda_\phi(X)$ il polinomio minimo di ϕ e la sua decomposizione in fattori irriducibili $\lambda_\phi(X) = p_1(X)^{m_1} \cdots p_r(X)^{m_r}$, con $MCD(p_i, p_j) = 1$ per $i \neq j$. In base al *Lemma di decomposizione*, posto $W_j = \ker[p_j(\phi)^{m_j}]$, per $j = 1, \dots, r$ si ha $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ e $\phi(W_j) \subseteq W_j$.

Dunque, è sufficiente mostrare che, per ogni sottospazio W_j, esiste un vettore w_j tale che $J_{w_j} = (p_j(X)^{m_j})$, perchè allora basta porre $v_0 = w_1 + \cdots + w_r$ per ottenere il vettore cercato. Se, per ogni $w \in W_j$, l'ideale J_w contenesse $p_j(X)^{m_j - 1}$, allora, $p_1(X)^{m_1} \cdots p_j(X)^{m_j-1} \cdots p_r(X)^{m_r}$ apparterrebbe a J_ϕ, contro l'ipotesi che $\lambda_\phi(X)$ sia il polinomo minimo. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X + 2)^4$. Inoltre, si ha

$$A + 2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A+2)^2 = \mathbf{0}$$

da cui si vede che il polinomio minimo è $(X+2)^2$ e $\mathrm{rk}\,(A+2) = 2$. Dunque i vettori $v_1 = (\phi+2)(e_3) = 3e_1+3e_3$, $v_2 = e_3$, $v_3 = (\phi + 2)(e_2) = 2e_1 + 3e_4$ e $v_4 = e_2$ formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J.

Dunque le matrici

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7. *Data una retta* $r = \sigma\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$ *di* $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, *si consideri*

$$P(r) = \begin{pmatrix} p_{01}(r) \\ p_{02}(r) \\ p_{03}(r) \\ p_{12}(r) \\ p_{13}(r) \\ p_{23}(r) \end{pmatrix} \qquad \textit{ove} \qquad p_{ij}(r) = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che la corrispondenza $\Phi : r \mapsto P(r)$ *è un'applicazione ben definita dall'insieme delle rette di* $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ *sui punti di* $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$.

(b) Si mostri che l'immagine di ϕ *è contenuta nel supporto di una quadrica* $\mathcal{Q}$ *di* $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$.

Svolgimento. L'elemento r di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è una retta se, e solo se, i due vettori che generano il sottospazio sono linearmente indipendenti e ciò significa che almeno uno tra i minori estratti dalle due colonne è diverso da zero e quindi $P(r)$ è un punto di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$. Per vedere che questa corrispondenza è ben definita, bisogna mostrare che il punto $P(r)$ non dipende dalla base scelta nel sottospazio vettoriale soprastante ad r, ma solo dal sottospazio. Data una retta r come sopra, si ha

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \gamma \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ se, e solo se, } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0;$$

e, per la multilinearità del determinante come funzione delle colonne, si ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha x_i + \beta y_i & \gamma x_i + \delta y_i \\ \alpha x_j + \beta y_j & \gamma x_j + \delta y_j \end{pmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$

qualunque siano $1 \leq i < j \leq 4$. Resta così determinata, in corrispondenza alla nuova base del sottospazio soprastante ad r, una 6-upla di coordinate omogenee, proporzionale a $P(r)$ e quindi lo stesso punto di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$.

(b). Si consideri

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \\ &= 2[(x_0y_1 - x_1y_0)(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_0y_2 - x_2y_0)(x_1y_3 - x_3y_1) + (x_0y_3 - x_3y_0)(x_1y_2 - x_2y_1)] = \\ &= 2(p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}). \end{aligned}$$

Poichè la matrice scritta sopra ha due colonne ripetute, il suo determinante è nullo e quindi l'immagine dell'applicazione Φ è contenuta nel supporto della quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, di equazione $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$, detta la *Quadrica di Klein*. □

ESERCIZIO 8. *Sia* $r = \sigma\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$ *una retta di* $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

(a) Si mostri che r *è sghemba con la retta* $h_{23} = \sigma\langle e_2, e_3 \rangle$ *se, e solo se,* $p_{01}(r) = \det\left(\begin{smallmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

(b) *Si verifichi che, se r è sghemba con la retta h_{23}, allora* $r = \sigma\left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\a\\b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\c\\d \end{pmatrix} \right\rangle$, *per opportune costanti a, b, c, d e tale scrittura è unica.*

(c) *Facendo riferimento all'esercizio precedente, si mostri che la restrizione dell'applicazione Φ induce una biiezione tra l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sghembe con h_{23}, ed i punti di $\mathcal{Q}$ contenuti nel complementare dell'iperpiano $p_{01} = 0$ di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$. Si concluda che Φ è biettiva.*

Svolgimento. Nelle notazioni sopra, la retta r è sghemba con h_{23} se, e solo se, $\det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 & 0\\ x_1 & y_1 & 0 & 0\\ x_2 & y_2 & 1 & 0\\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$; ed un calcolo diretto permette di verificare che il determinante di tale matrice è proprio uguale a $p_{01}(r) = \det \begin{pmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}$.

(b). Poichè $\det \begin{pmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \neq 0$, esistono e sono uniche delle costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_0\\x_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_0\\y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x_0\\x_1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} y_0\\y_1 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\alpha \begin{pmatrix} x_0\\x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_0\\y_1\\y_2\\y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0\\a\\b \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma \begin{pmatrix} x_0\\x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} y_0\\y_1\\y_2\\y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\1\\c\\d \end{pmatrix}$$

e, per ogni retta r di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, sghemba con h_{23}, vi è un'unica base del sottospazio soprastante della forma data.

(c). Rispetto a tale base, si ottengono per il punto $P(r)$ le coordinate $\begin{pmatrix} 1\\b\\d\\-a\\-c\\ad-bc \end{pmatrix}$ e quindi è una conseguenza del punto precedente, che la restrizione di Φ alle rette di questo tipo è iniettiva. Inoltre, se $\begin{pmatrix} p_{01}\\p_{02}\\p_{03}\\p_{12}\\p_{13}\\p_{23} \end{pmatrix}$ è un punto del supporto di $\mathcal{Q}$, con $p_{01} \neq 0$, posto

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = b, \qquad \frac{p_{03}}{p_{01}} = d, \qquad \frac{p_{12}}{p_{01}} = -a, \qquad \frac{p_{13}}{p_{01}} = -c,$$

si ha $\dfrac{p_{23}}{p_{01}} = ad - bc$, perchè il punto è nel supporto di $\mathcal{Q}$; e quindi il punto è nell'immagine di Φ.

Ragionando analogamente, si ottiene che la restrizione di Φ alle rette sghembe con $h_{ij} = \sigma\langle e_i, e_j\rangle$, per $0 \leq i < j \leq 3$, è una biiezione sull'insieme dei punti di $\mathcal{Q}$ contenuti nel complementare dell'iperpiano $p_{ij} = 0$. Poichè l'unione di tali insiemi fornisce da una parte tutte le rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ e dall'altra tutti i punti del supporto di $\mathcal{Q}$, si conclude che Φ è una biiezione. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri la parabola $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y = 0.$$

Si determini l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ e la matrice dell'isometria che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica. Si determinino inoltre, l'asse, il vertice, il fuoco e la direttrice di $\mathcal{C}$.

Svolgimento. Si tratta della parabola non degenere, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo $\det A = -25$ e $\det A' = 0$. La matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ha gli autovalori 0 e 5, a cui corrispondono gli spazi di autovettori, ovvero i punti impropri $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, che sono rispettivamente le direzioni dell'asse di $\mathcal{C}$ e della tangente al vertice. In particolare, l'asse di $\mathcal{C}$ è la polare di Q_∞, ovvero la retta $h : 2x - y + 1 = 0$, ed il vertice è il punto (proprio) di intersezione tra l'asse e $\mathcal{C}$, ovvero $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. In base a quanto visto, l'equazione canonica della parabola $\mathcal{C}$ è quindi $2Y = \sqrt{5}X^2$ e la matrice della trasformazione di coordinate è quindi

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad \tfrac{1}{\sqrt{5}}{}^tXAX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, osserviamo che il fuoco è il punto di coordinate omogenee $F = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la direttrice, che è la polare di F, ha equazione $x + 2y + 1 = 0$. □

ESERCIZIO 10. *Sia V uno spazio vettoriale complesso (di dimensione infinita), dotato di una forma hermitiana, definita positiva, $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. In meccanica quantistica, ad ogni stato di un oggetto fisico si associa un vettore $v \in V$ con $\|v\| = 1$ e ad ogni grandezza misurabile A un endomorfismo $\phi_A : V \to V$, autoaggiunto. Il valore teorico atteso della grandezza A nello stato v è dato dalla grandezza $\langle v, \phi_A(v) \rangle \in \mathbb{R}$. Sia $a \in \mathbb{R}$ il valore misurato della grandezza A. Questo valore può essere diverso dal valore teorico ed il valor medio dell'errore quadratico compiuto nella misura è dato dalla grandezza $|\Delta A|^2 = \|(\phi_A - a\mathbf{1})(v)\|^2$.*

(a) *Siano A e B due grandezze misurabili e ϕ_A, ϕ_B gli endomorfismi autoaggiunti ad esse associati. Posto $\lambda = i(\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A)$ e $\mu = \phi_A\phi_B + \phi_B\phi_A$ si mostri che λ e μ sono autoaggiunti e che, per ogni v, con $\|v\| = 1$, si ha*
$$|\Delta A|^2 |\Delta B|^2 \geq \tfrac{1}{4} |\langle v, \lambda(v) \rangle|^2.$$

(b) *Siano A la posizione di una particella e B la sua quantità di moto. Sapendo che $\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A = i\hbar\mathbf{1}_V$ ($\hbar$ è la costante di Planck), si deduca dal punto precedente il principio di indeterminazione di Heisenberg, ovvero*
$$|\Delta A||\Delta B| \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Svolgimento. (a). Gli endomorfismi ϕ_A e ϕ_B sono autoaggiunti, ovvero si ha ${}^t\overline{\phi_A} = \phi_A$ e ${}^t\overline{\phi_B} = \phi_B$; quindi è immediato verificare che anche $\lambda = i(\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A)$ e $\mu = \phi_A\phi_B + \phi_B\phi_A$ sono autoaggiunti.

Consideriamo ora gli endomorfismi $\phi'_A = \phi_A - a\mathbf{1}$ e $\phi'_B = \phi_B - b\mathbf{1}$. Per le ipotesi fatte anche ϕ'_A e ϕ'_B sono autoaggiunti e si ha
$$\lambda' = i(\phi'_A\phi'_B - \phi'_B\phi'_A) = i(\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A) = \lambda.$$
Sia v, con $\|v\| = 1$, ed osserviamo che, in base alla disuguaglianza di Schwarz, si ha
$$|\Delta A|^2|\Delta B|^2 = |\phi'_A(v)|^2|\phi'_B(v)|^2 \geq |\langle \phi'_A(v), \phi'_B(v) \rangle|^2 = |\langle v, \phi'_A(\phi'_B(v)) \rangle|^2.$$
Ora, considerando gli endomorfismi autoaggiunti λ' e $\mu' = \phi'_A\phi'_B + \phi'_B\phi'_A$, si ha $\phi'_A(\phi'_B(v)) = \frac{1}{2}\mu'(v) - \frac{i}{2}\lambda'(v)$, e quindi,
$$|\langle v, \phi'_A(\phi'_B(v)) \rangle|^2 = \left|\tfrac{1}{2}\langle v, \mu(v) \rangle + \tfrac{i}{2}\langle v, \lambda'(v) \rangle\right|^2 \geq \tfrac{1}{4}|\langle v, \lambda(v) \rangle|^2$$
dato che $\lambda' = \lambda$.

(b). Se A e B sono rispettivamente la posizione la quantità di moto di una particella, si può applicare la disuguaglianza precedente, tenendo conto della relazione fondamentale $\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A = i\hbar\mathbf{1}_V$, ed ottenere così
$$|\Delta A|^2|\Delta B|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle v, \lambda(v) \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{4}|\langle v, v \rangle|^2$$
che permette di concludere, dato che $\|v\| = 1$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 7 settembre 1999

ESERCIZIO 1. *Siano date due matrici $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ e $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ e si consideri l'applicazione $\tau : M_{2\times 3}(\mathbb{Q}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$, definita da $\tau(X) = AXB$, per ogni $X \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$.*

(a) *Dopo aver osservato che τ è un'applicazione lineare, si mostri che τ è invertibile se, e solo se, entrambo le matrici A e B lo sono.*

(b) *Considerata la base canonica di $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$, nell'ordine (lessicografico)*

$$\varepsilon(11) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(12) = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(13) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon(21) = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(22) = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(23) = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix},$$

si scrivano gli elementi della matrice di τ rispetto a tale base, in termini degli elementi delle matrici A e B.

Svolgimento. (a). Se A e B sono invertibili, l'inversa di τ è l'applicazione $Y \mapsto A^{-1}YB^{-1}$. Se una tra le due matrici A e B non fosse invertibile, sia ad esempio B, allora esisterebbe un vettore non nullo $v \in \mathbb{Q}^3$ tale che $Bv = 0$. Ne consegue che tutti gli elementi $AXB \in \operatorname{im}\tau$ si annullano calcolati in v e quindi $\operatorname{im}\tau$ è un sottospazio proprio di $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$. Analogamente, se fosse A a non essere invertibile, allora esisterebbe un vettore $w \in \mathbb{Q}^2$ non appartenente all'immagine di A e quindi non appartenente all'immagine di tutti gli elementi $AXB \in \operatorname{im}\tau$. Anche in questo caso, $\operatorname{im}\tau$ è un sottospazio proprio di $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ e τ non può essere invertibile.

(b). Posto $Y = AXB$, con un calcolo esplicito del prodotto si verifica che

$$y_{ij} = \sum_{\substack{1\le h\le 2\\ 1\le k\le 3}} a_{ih}x_{hk}b_{kj},$$

per $i = 1, 2$, e $j = 1, 2, 3$. Dunque, la matrice di τ è uguale a

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} & a_{11}b_{31} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{31} \\ a_{11}b_{12} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{32} \\ a_{11}b_{13} & a_{11}b_{23} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{13} & a_{12}b_{23} & a_{12}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{21} & a_{21}b_{31} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{31} \\ a_{21}b_{12} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{32} \\ a_{21}b_{13} & a_{21}b_{23} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{13} & a_{22}b_{23} & a_{22}b_{33} \end{pmatrix},$$

ovvero è uguale al cosiddetto *prodotto di Kronecker* delle matrici A e ${}^tB$. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino le due forme lineari $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$, definite da $\ell_1(x) = 3x_1 - 2x_3 + x_4$ e $\ell_2(x) = 2x_2 - x_3 + x_4$, al variare di $x = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$.*

(a) *Si scriva la matrice A dell'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica $q(x) = 2\ell_1(x)\ell_2(x)$ e si verifichi che A ha rango 2.*

(b) *Si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$, di matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

e sia $q_g(x) := g(x,x)$ la forma quadratica ad essa associata. Si verifichi che B ha rango 2 e si determinino due forme lineari $m_1(x)$ ed $m_2(x)$ tali che $q_g(x) = 2m_1(x)m_2(x)$.

Svolgimento. (a). Le forme lineari ℓ_1 ed ℓ_2 hanno matrici (rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{Q}^4$ e $\mathbb{Q}$) $a = (0,2,-1,1)$ e $b = (3,0,-2,1)$ rispettivamente. Dunque, l'applicazione bilineare simmetrica g ha matrice

$$A = {}^tab + {}^tba = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(3,0,-2,1) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}(0,2,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè le colonne di A sono combinazione lineare delle colonne ${}^ta$ e ${}^tb$, è chiaro che il suo rango non può essere maggiore di 2, ed è uguale a 2 perchè vi sono dei minori di ordine 2 diversi da zero.

(b). È facile scrivere la prima e la quarta colonna di B come combinazione lineare delle due colonne centrali, che sono tra loro indipendenti, e quindi B ha rango 2.

Se la forma quadratica q_g si decompone come prodotto di due forme lineari, ciò significa che esistono due sottospazi isotropi di dimensione 3 in V relativamente a g; ovvero i due iperpiani che corrispondono al luogo degli zeri delle due forme lineari. I due sottospazi isotropi massimali dovranno contenere entrambi il nucleo di g, $N = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e, per determinarli completamente, sarà sufficiente conoscere due vettori isotropi, linearmente indipendenti, appartenenti ad un sottospazio di V complementare ad N. Consideriamo allora il sottospazio $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, complementare ad N, e la restrizione di g ad U, che ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Da ciò si vede che i due generatori fissati di U sono vettori isotropi rispetto a g, e quindi si conclude che i due sottospazi isotropi massimali sono

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Le forme lineari cercate sono quindi equazioni di tali sottospazi, ovvero $m_1(x) = x_1 + 2x_3 - 2x_4$ ed $m_2(x) = 2x_1 + x_2 - x_4$. □

ESERCIZIO 3. *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

Si consideri ora lo spazio vettoriale reale W con l'applicazione bilineare $h : W \times W \to \mathbb{R}$ di matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

Si dica se esiste un'isometria $\phi : W \to V$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice di una tale ϕ rispetto alle basi date.

Svolgimento. L'applicazione bilineare g è non degenere, essendo $\det G = -7$ ed osserviamo che può esistere un'isometria tra i due spazi se, e solo se, V ammette una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ rispetto a cui g abbia matrice H. In tal caso un'isometria $\phi : W \to V$ è l'applicazione lineare, definita da $\phi(w_i) = u_i$ per $i = 1, \dots, 4$.

Con procedure standard, si può determinare la base

$$u_1 = \tfrac{1}{3\sqrt{7}}(v_1 + 7v_2 - 4v_3 - 9v_4), \quad u_2 = \tfrac{1}{3\sqrt{2}}(-v_1 + 2v_2 + 4v_3), \quad u_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}v_1, \quad u_4 = v_3$$

rispetto a cui g ha matrice H ed è quindi facile scrivere la matrice dell'isometria ϕ descritta sopra, ovvero

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{7}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{7}{3\sqrt{7}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{7}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Sia $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ una matrice simmetrica ad elementi reali e, per ogni $i = 1, \dots, n$ si ponga $\delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$. Si mostri che, se $\delta_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora la matrice A è congruente*(†) *alla matrice*

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2/\delta_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \delta_n/\delta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. La dimostrazione si può fare per induzione su n. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e sia $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare di matrice A rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Se $n = 1$ la tesi è banalmente vera. Vediamo ora come si può dimostrare il caso $n = 2$. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ con $\delta_1 = a_{11} \neq 0 \neq \delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. È chiaro che, posto $w_1 = e_1$ si ha $g(w_1, w_1) = \delta_1$. Consideriamo ora un vettore w_2 determinato dalle condizioni $\langle w_2 \rangle = \langle w_1 \rangle^\perp$ e $w_2 = e_2 + ce_1$, per un opportuno $c \in \mathbb{R}$ (un tale vettore è $e_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}e_1$). Posto $d_2 = g(w_2, w_2)$, e considerata la matrice $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1)$, si ha

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce l'uguaglianza dei determinanti $\delta_1 d_2 = \det A = \delta_2$, che è la tesi. Quindi, sia $n > 2$ e supponiamo che l'enunciato sia vero per $n-1$. Ciò significa che, considerata la restrizione di g al sottospazio $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$, esistono dei vettori $w_1, \dots, w_{n-1} \in W$, tali che $w_1 = e_1$, $w_i \in \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle^\perp$ e $w_i = e_i + u_i$ per un opportuno $u_i \in \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle$, per $i = 2, \dots, n-1$. In particolare si ha $g(w_1, w_1) = \delta_1$ e $g(w_i, w_i) = \delta_i/\delta_{i-1}$, per $i = 2, \dots, n-1$. Scelto quindi un vettore $w_n \in \langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle^\perp$ con $w_n = e_n + u_n$, ed $u_n \in \langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle$, sia $d_n = g(w_n, w_n)$, e considerata la matrice $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si

(†) Il risultato qui enunciato per il corpo $\mathbb{R}$, è vero su ogni corpo C, di caratteristica diversa da 2, e viene talvolta indicato come *Teorema di Jacobi*. Nel caso del corpo reale, mette bene in evidenza le relazioni esistenti tra i segni dei minori principali di A e l'indice di inerzia dell'applicazione bilineare da essa rappresentata.

ha ancora una volta l'identità

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2/\delta_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ c_{1n} & \dots & c_{n-1\,n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi l'uguaglianza dei determinanti $\delta_{n-1}d_n = \det A = \delta_n$, che è la tesi. □

ESERCIZIO 5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 15 sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo tale che*

$$rk(\phi) = 10, \quad rk(\phi^2) = 7, \quad rk(\phi^3) = 4, \quad rk(\phi^4) = 2, \quad rk(\phi^5) = 0.$$

Si scriva una matrice di Jordan di ϕ.

Svolgimento. Poichè $\phi^5 = 0 \neq \phi^4$, si tratta di un endomorfismo nilpotente di periodo 5 e quindi ϕ ha il solo autovalore 0 con molteplicità $15 = \dim V$. Poichè $\mathrm{rk}(\phi^4) = 2$, vi sono due blocchi di Jordan di periodo 5; inoltre, poichè $\mathrm{rk}(\phi^2) = 7$, deve esserci un ulteriore blocco di periodo 3, perchè i due soli blocchi di periodo 5 produrrebbero un endomorfismo il cui quadrato ha rango 6. Infine, poichè $\dim\ker\phi = 5$, vi sono due ulteriori blocchi di periodo 0, ovvero due autovettori linearmente indipendenti tra loro ed indipendenti dagli autovettori relativi ai tre blocchi di Jordan di periodo positivo. Dunque una matrice di Jordan di ϕ è uguale a

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 &&&&&&&&&&&&&& \\
& 0 &&&&&&&&&&&&& \\
&& 0 & 1 & 0 &&&&&&&&&& \\
&& 0 & 0 & 1 &&&&&&&&&& \\
&& 0 & 0 & 0 &&&&&&&&&& \\
&&&&& 0 & 1 & 0 & 0 & 0 &&&&& \\
&&&&& 0 & 0 & 1 & 0 & 0 &&&&& \\
&&&&& 0 & 0 & 0 & 1 & 0 &&&&& \\
&&&&& 0 & 0 & 0 & 0 & 1 &&&&& \\
&&&&& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &&&&& \\
&&&&&&&&&& 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
&&&&&&&&&& 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
&&&&&&&&&& 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
&&&&&&&&&& 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
&&&&&&&&&& 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X-1)^4$. Inoltre, si ha

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A-1)^3 = \mathbf{0}$$

da cui si vede che il polinomio minimo è $(X-1)^3$ e $\mathrm{rk}\,(A-1)=2$. I vettori $v_1=e_1+2e_2$, $v_2=(\phi-1)^2(e_3)=4e_1-4e_4$, $v_3=(\phi-1)(e_3)=2e_1-2e_2-e_4$ e $v_4=e_3$ formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J. Dunque le matrici

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2&0\\2&0&-2&0\\0&0&0&1\\0&-4&-1&0\end{pmatrix}\qquad\text{e}\qquad J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri la circonferenza di centro* $C=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ *e raggio 2, contenuta nel piano* $\pi: z=0$. *Si consideri ora il cono* $\mathscr{C}$, *di vertice* $V=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, *che proietta tale circonferenza nello spazio.*
(a) Si determini l'equazione cartesiana di $\mathscr{C}$.
(b) Si determinino i piani del fascio di asse $r=\begin{cases}y=2\\z=2\end{cases}$ *che tagliano delle iperboli (non degeneri) su* $\mathscr{C}$.

Svolgimento. (a). Un punto dello spazio $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (con $z\neq 2$) appartiene al cono $\mathscr{C}$ se, e solo se, la retta $X+V$ interseca il piano π in un punto della circonferenza data. Il generico punto di tale retta è $V+\lambda(X-V)$, al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$, ed interseca il piano π quando $2+\lambda(z-2)=0$, ovvero $\lambda=\frac{2}{2-z}$. Inoltre, il punto di intersezione $\begin{pmatrix}\frac{2x}{2-z}\\1+\frac{2(y-1)}{2-z}\\0\end{pmatrix}$ appartiene alla circonferenza se, e solo se,

$$\left[\frac{2x}{2-z}-1\right]^2+\left[1+\frac{2(y-1)}{2-z}+2\right]^2=4\quad\text{ovvero}\quad 2x^2+2xz+2y^2-6yz+3z^2-4x+8y-6z+2=0.$$

Abbiamo ottenuto così l'equazione cartesiana del cono $\mathscr{C}$.
(*b*). I piani del fascio di asse r, escluso il piano orizzontale $z=2$ che taglia su $\mathscr{C}$ il vertice, hanno equazione $\sigma_a:(y-2)+a(z-2)=0$, al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$. Una conica è un'iperbole se, e solo se, la sua intersezione con la retta impropria del piano in cui giace è costituita da due punti reali distinti, quindi si tratta di determinare i valori del parametro a per cui l'intersezione

$$\mathscr{C}\cap\sigma_a\cap\pi_\infty:\begin{cases}x_0=0\\x_2+ax_3=0\\2x_1^2+2x_1x_3+2x_2^2-6x_2x_3+3x_3^2=0\end{cases}$$

è costituita da due punti reali. Il trinomio $2x_1^2+2x_1x_3+(2a^2+6a+3)x_3^2$ ha due radici reali distinte se, e solo se, $\frac{\Delta}{4}=1-2(2a^2+6a+3)>0$ e ciò accade se, e solo se, $-\frac{5}{2}<a<-\frac{1}{2}$. Dunque, per tutti e soli questi valori del parametro a i piani del fascio tagliano iperboli (non-degeneri...perchè?) su $\mathscr{C}$. □

ESERCIZIO 8. *Nel piano proiettivo reale si considerino i tre punti* $P=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. *Si determinino tutte le coniche per cui il triangolo* PQR *è autopolare*[†].

[†] Ricordiamo che un triangolo si dice *autopolare* se ogni suo vertice è il polo del lato opposto.

Svolgimento. Sia $\mathcal{C}$ una conica. Se la retta $Q + R$ è la polare del punto P e la retta $P + R$ è la polare del punto Q, allora, il punto $(P + R) \cap (Q + R) = R$ è necessariamente il polo della retta $P + Q$. È quindi sufficiente imporre le prime due condizioni affinchè il triangolo sia autopolare.

Osserviamo che le coordinate plückeriane dei lati sono $P + R = (0, 1, 0)$ e $Q + R = (2, 1, 1)$, quindi il triangolo PQR è autopolare rispetto alla conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se, e solo se, si ha

$$\begin{cases} (1, 0, 2)A = \rho(2, 1, 1) \\ (-1, 1, 1)A = \tau(0, 1, 0) \end{cases}, \qquad \text{con } \rho \neq 0 \neq \tau.$$

Eliminando ρ e τ si ottiene così il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{00} - a_{01} - a_{02} = 0 \\ a_{02} - a_{12} - a_{02} = 0 \\ a_{00} + 2a_{02} = 2(a_{02} + 2a_{22}) \\ a_{01} + 2a_{12} = a_{02} + 2a_{22} \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a_{00} = 4a_{22} \\ a_{01} = 3a_{22} - a_{11} \\ a_{02} = a_{11} + a_{22} \\ a_{12} = a_{11} \end{cases}.$$

Dunque le coniche cercate formano un fascio e

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

è la matrice della generica conica di tale fascio. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri l'iperbole $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 4xy - 3x^2 - 2x + 4y - 2 = 0.$$

Si determinino il centro, gli asintoti e gli assi di $\mathcal{C}$, indicando quale sia l'asse focale. Si determinino inoltre l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica. (Non è richiesta la determinazione dei fuochi.)

Svolgimento. Si tratta dell'iperbole non degenere, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

essendo $\det A = 12$ e $\det A' = -4$. Gli asintoti sono le rette tangenti alla conica nei suoi punti impropri $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, ovvero le rette $a_1 : x + 1 = 0$ e $a_2 : 4y - 3x + 1 = 0$. Le due rette si intersecano nel centro di $\mathcal{C}$, che è qundi il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La matrice $A' = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ha gli autovalori 1 e -4, a cui corrispondono gli spazi di autovettori, ovvero i punti impropri $P_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ e $Q_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, che sono le direzioni degli assi di $\mathcal{C}$. In particolare, poichè

$-\frac{\det A'}{\det A} = \frac{1}{3} > 0$, la direzione dell'asse focale è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore positivo. Gli assi di $\mathcal{C}$ sono quindi

$$h_1 : 2x - y + 1 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : x + 2y + 3 = 0.$$

In base a quanto visto, l'equazione canonica dell'iperbole $\mathcal{C}$ è quindi $\frac{X^2}{3} - \frac{4Y^2}{3} = 1$ e la matrice della trasformazione di coordinate è quindi

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad -\frac{\det A'}{\det A}\,{}^tXAX = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 10. *Si consideri la parabola $\mathscr{P}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathscr{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 6y = 0.$$

Si determini (se esiste) il cerchio $\mathscr{C}$, osculatore a $\mathscr{P}$ nel punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svolgimento. Per determinare il cerchio $\mathscr{C}$ è sufficiente determinare quale tra i fasci di coniche osculatrici a $\mathscr{P}$ in P contiene un cerchio. La retta tangente a $\mathscr{P}$ in P è la polare di P, ovvero $t : 2x + y + 2 = 0$; una generica retta per P ha equazione $r_{(a,b)} : a(x + 1) + by = 0$ e quindi si tratta di determinare i parametri omogenei (a, b) affinchè il fascio determinato da $\mathscr{P}$ e dalla conica degenere $t \cdot r_{(a,b)}$ contenga un cerchio.

La generica conica di tale fascio ha matrice

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4a & 4a & a+2b \\ 4a & 4a & a+2b \\ a+2b & a+2b & 2b \end{pmatrix}$$

ed è un cerchio se, e solo se, i parametri omogenei (λ, μ) soddisfano alla condizione

$$\begin{cases} 4\lambda + 4a\mu = \lambda + 2b\mu \\ -2\lambda + (a+2b)\mu = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 3\lambda + (4a-2b)\mu = 0 \\ -2\lambda + (a+2b)\mu = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema ammette una soluzione non banale nelle incognite λ e μ se, e solo se, il determinante della matrice (incompleta) è uguale a zero, ovvero se si ha $3(a+2b) + 2(4a-2b) = 0$, ovvero $a = -2$, $b = 11$; ed in tal caso si ha $\lambda = 10$ e $\mu = 11$. Da ciò si deduce che il cerchio osculatore ha equazione $\mathscr{C} : 8x^2 + 8y^2 + 6x - 5y - 2 = 0$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 28 settembre 1999

ESERCIZIO 1. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si determinino le dimensioni dei sottospazi

$$R = \{\, X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, AX = \mathbf{0} \,\} \qquad \textit{ed} \qquad L = \{\, Y \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, YA = \mathbf{0} \,\}$$

e si scriva una base per ciascuno di tali sottospazi.

Svolgimento. Affinchè una matrice X stia nel sottospazio R, le sue colonne devono essere elementi del nucleo di A. Poichè A ha rango 1, il suo nucleo ha dimensione 2 ed inoltre, una base di tale nucleo è costituita dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque una base di R è costituita dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

da cui si conclude che $\dim_{\mathbb{R}} R = 6$.

Affinchè una matrice X stia nel sottospazio L, le sue righe devono essere ortogonali all'immagine di A. Poichè A ha rango 1, l'ortogonale dell'immagine ha dimensione 2 ed inoltre, una base di tale sottospazio è costituita dai vettori $(2, -1, 0)$ e $(3, 0, -1)$. Dunque una base di L è costituita dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

da cui si conclude che $\dim_{\mathbb{R}} L = 6$. □

ESERCIZIO 2. *Ricordiamo che si chiama quadrato magico ogni matrice quadrata ad elementi interi (positivi) in cui la somma degli elementi di ciascuna riga è uguale alla somma degli elementi di ciascuna colonna ed è anche uguale alla somma degli elementi posti su ciascuna delle due diagonali.*

(a) Si mostri che gli unici quadrati magici di ordine 2 sono banali, ovvero hanno tutte le entrate uguali.

(b) Si determinino i quadrati magici di ordine 3.

Svolgimento. (a). Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è un quadrato magico allora deve aversi $a+b = c+d = a+c = b+d = a+d = b+c$ ed è immediato verificare che tali condizioni sono soddisfatte se, e solo se, $a = b = c = d$.

(b). Consideriamo ora un quadrato magico di ordine 3, che scriviamo secondo la consuetudine nella forma

x_1	x_2	x_3
y_1	y_2	y_3
z_1	z_1	z_3

.

Le entrate del quadrato magico devono soddisfare al sistema omogeneo di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = z_1 + z_2 + z_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + y_1 + z_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + y_2 + z_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + y_2 + z_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = z_1 + y_2 + x_3 \end{cases}$$

la cui matrice è riga-equivalente (come si vede, ad esempio, usando la tecnica di eliminazione di Gauß) alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque si tratta di un sistema di rango 6 e soluzioni fondamentali del problema sono i quadrati magici

0	2	1
2	1	0
1	0	2

2	1	3
3	2	1
1	3	2

1	1	1
1	1	1
1	1	1

quindi ogni altra soluzione si ottiene da queste facendo combinazioni lineari (a coefficienti interi). $\square$

ESERCIZIO 3. *Siano C un campo finito di caratteristica 2 e V uno spazio vettoriale, di dimensione finita su C.*

(a) Si mostri che ogni elemento di C è un quadrato in C.
(b) Sia $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare simmetrica, non-degenere. Si mostri che, se g non è alternante, allora esiste una base ortonormale.

Svolgimento. (a). In un campo di caratteristica 2, l'applicazione $x \mapsto x^2$ è un omomorfismo iniettivo di anelli; ovvero si ha $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, $(xy)^2 = x^2y^2$, ed $x^2 = 0$ se, e solo se, $x = 0$. Dunque, poichè C ha un numero finito di elementi, l'applicazione è anche suriettiva in quanto immagine e codominio hanno lo stesso numero di elementi. Ciò significa esattamente che ogni elemento di C è un quadrato.

(*b*). Sia $n = \dim_C V$. Se $n = 1$, l'affermazione discende dal punto precedente. Se $n = 2$ e $v \in V$ è un vettore non-isotropo (g non è alternante), per il punto precedente, possiamo supporre di avere $g(v, v) = 1$. Inoltre, poichè g è non-degenere, vi è un vettore non-isotropo $w' \in \langle v \rangle^\perp$. Sia $g(w', w') = c \neq 0$ e, per il punto (a), sia $d^2 = c$. Allora i vettori v e $w = d^{-1}w'$ formano una base ortonormale di V.

Sia ora $n = 3$ ed $u \in V$ un vettore non-isotropo, con $g(u, u) = 1$. Sappiamo che la restrizione di g a $\langle u \rangle^\perp$ è non-degenere e, se esiste un vettore non isotropo in tale sottospazio possiamo concludere ragionando come newi casi precedenti; ma non c'è ragione perche debbano necessariamente esistere dei vettori non isotropi in tale sottospazio. Ovvero dobbiamo dimostrare la tesi nel caso in cui esiste una base $\{u, v, w\}$ di V, rispetto a cui g ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si considerino allora i vettori

$$v_1 = u + v, \qquad v_2 = u + w, \qquad v_3 = u + v + w,$$

e (ricordando che $1 + 1 = 0$ in C) si verifica facilmente che si tratta di una base ortonormale di V.

Infine, se $n > 3$, si può procedere per induzione, partendo da un vettore non-isotropo u (che esiste perchè g non è alternante) e considerando la decomposizione $V = \langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^\perp$, ove la restrizione di g a $\langle u \rangle^\perp$ è non degenere. Se $\langle u \rangle^\perp$ contiene un vettore non isotropo, si procede analogamente nel sottospazio $\langle u \rangle^\perp$; mentre, se la restrizione di g a $\langle u \rangle^\perp$ è alternante, si considerano due vettori (isotropi) in $\langle u \rangle^\perp$, non ortogonali tra loro e si ragiona come sopra nel sottospazio $W = \langle u, v, w \rangle$ di dimensione 3. Analogamente si può procedere in $W^\perp$ e concludere. $\square$

ESERCIZIO 4. *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

Si consideri ora lo spazio vettoriale reale W con l'applicazione bilineare $h : W \times W \to \mathbb{R}$ di matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

Si dica se esiste un'isometria $\phi : W \to V$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice di una tale ϕ rispetto alle basi date.

Svolgimento. L'applicazione bilineare g è non degenere, essendo $\det G = -2$ ed osserviamo che la restrizione di g al sottospazio $\langle v_3, v_4 \rangle$ è definita positiva. Dunque, g ha indice di inerzia 2 e quindi esiste un'isometria tra i due spazi. Per determinare una tale isometria è sufficiente determinare una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di V, rispetto a cui g abbia matrice H ed, in tal caso, un'isometria $\phi : W \to V$ è l'applicazione lineare, definita da $\phi(w_i) = u_i$ per $i = 1, \dots, 4$.

Consideriamo quindi i vettori

$$u_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} v_3, \qquad u_2 = v_4, \qquad u_3 = -\tfrac{1}{4} v_1, \qquad u_4 = v_1 - 4v_2 + 2v_3 + 4v_4$$

rispetto a cui g ha matrice H ed è quindi facile scrivere la matrice dell'isometria ϕ descritta sopra, ovvero

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Siano ϕ e ψ due endomorfismi di uno spazio vettoriale reale V. Il commutatore di ϕ e ψ è l'endomorfismo $[\phi, \psi] = \phi \circ \psi - \psi \circ \phi$.*

(a) Se V ha dimensione finita, si mostri che $[\phi, \psi] = c1_V$, per una qualche costante c, implica $c = 0$.

(b) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[X]$ dei polinomi nell'indeterminata X, e gli endomorfismi $\partial : P(X) \mapsto P'(X)$ (derivazione) ed $x : P(X) \mapsto XP(X)$ (moltiplicazione per X). Si calcoli $[\partial, x]$.

Svolgimento. (a). Se lo spazio vettoriale V ha dimensione finita, esiste l'applicazione lineare $\mathrm{tr} : \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \to \mathbb{R}$, che associa ad ogni endomorfismo ϕ la sua *traccia*, ovvero la somma degli elementi posti sulla diagonale di una qualunque matrice di ϕ (purchè relativa alla stessa base nel dominio e nel codominio di ϕ). È ben noto che, qualunque siano ϕ e ψ, $\mathrm{tr}(\phi \circ \psi) = \mathrm{tr}(\psi \circ \phi)$, e quindi si ha $\mathrm{tr}[\phi, \psi] = 0$, mentre d'altro canto $\mathrm{tr}(c1_V) = c \dim V$ e quindi le due grandezze coincidono se, e solo se, $c = 0$.

(*b*). Dato un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, si ha

$$[\partial, x]P(X) = \partial(XP(X)) - X\partial(P(X)) = P(X) + XP'(X) - XP'(X) = P(X)$$

e quindi l'endomorfismo $[\partial, x] : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ coincide con l'applicazione identica, ovvero con la moltiplicazione per 1. Possiamo quindi scrivere $[\partial, x] = 1_{\mathbb{R}[X]}$. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X + 3)^4$. Inoltre, si ha

$$A + 3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (A + 3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A + 3)^3 = \mathbf{0}$$

da cui si vede che il polinomio minimo è $(X + 3)^3$ e $\mathrm{rk}(A - 1) = 2$. I vettori $v_1 = 3e_1 - e_2 - e_3$, $v_2 = (\phi + 3)^2(e_2) = 9e_1 + 9e_4$, $v_3 = (\phi + 3)(e_2) = e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 2e_4$ e $v_4 = e_2$ formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J. Dunque le matrici

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo si considerino i punti*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e le rette $r = P + Q$ ed $s = R + S$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di r ed s e si calcoli la loro distanza.
(b) Si scriva l'equazione del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti la cui distanza da r è doppia della distanza da s.
(c) Si determinino (se esistono) i piani che tagliano delle circonferenze su $\mathcal{Q}$.

Svolgimento. (a). La retta r è parallela al vettore $v = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre la retta s è parallela al vettore $w = S - R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le equazioni cartesiane sono

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

e quindi si tratta di due rette non parallele, giacenti rispettivamente sui piani (paralleli) $z = 1$ e $z = 2$. Dunque le due rette sono sghembe e la loro distanza è la distanza tra i due piani, ovvero 1.

(b). Un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ha distanza da r doppia della distanza da s se, e solo se,

$$\frac{\|(X - P) \times v\|}{\|v\|} = 2\frac{\|(X - R) \times w\|}{\|w\|}.$$

Da ciò si ottiene l'equazione del luogo $\mathcal{Q} : 3x^2 + 3y^2 + 10xy + 6z^2 - 28z + 30 = 0$. (c). Poichè $\mathcal{Q}$ è definita da un'equazione di secondo grado, ogni piano taglia su di essa una conica (che può essere degenere). Una conica è un cerchio se, e solo se, contiene i punti ciclici del piano su cui giace. Dunque, si tratta di determinare i punti ciclici contenuti in $\mathcal{Q}$ e le rette improprie reali contenenti tali punti. Queste determineranno fasci di piani (paralleli tra loro) che tagliano su $\mathcal{Q}$ circonferenze. I punti ciclici di $\mathcal{Q}$ soddisfano alle condizioni

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 + 6x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi sono i quattro punti impropri

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ i\sqrt{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -i\sqrt{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ i\sqrt{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -i\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

che determinano i due fasci di piani reali di equazioni affini $\pi_\lambda : x - 3y + \lambda = 0$ e $\sigma_\mu : 3x - y + \mu = 0$. Lasciamo al lettore il compito di verificare per quali valori dei parametri si hanno coniche degeneri. □

ESERCIZIO 8. *Nello spazio euclideo orientato si consideri l'affinità f di matrice*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

rispetto ad un riferimento ortonormale (concorde con l'orientamento fissato).

(a) Si verifichi che si tratta di una rotazione e se ne determinino l'asse e l'angolo di rotazione.

(b) Dato il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*, si determinino il centro ed il raggio dell'arco di circonferenza descritto da P nella rotazione f.*

Svolgimento. (a). La matrice dell'applicazione lineare associata ad f (ovvero la matrice che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna di R)è una matrice ortogonale e quindi f è un'isometria. Inoltre, $\det R = 1$ e quindi si tratta di una rotazione. I punti uniti rispetto ad f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{2}z + 1 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + y + \frac{1}{\sqrt{2}}z - 1 = 0 \end{cases},$$

e quindi si tratta della retta h, di direzione $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Una base (ortogonale) concorde con l'orientamento fissato è formata dai vettori $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tale base viene trasformata da f ordinatamente in w, $-v$, z e quindi l'angolo di rotazione è $\frac{\pi}{2}$.

(b). Indicato con π il piano perpendicolare all'asse, passante per P, è chiaro che il centro della circonferenza è l'intersezione $\{Q\} = \pi \cap h$ e che il raggio della stessa è la distanza tra P e Q. Si ha quindi $\pi : x - z = 0$, da cui si deduce che $Q = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ed il raggio è $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri l'ellisse $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 5x^2 + 5y^2 - 2xy + 4x - 4y + 1 = 0.$$

Si determinino il centro, gli assi ed i fuochi di $\mathcal{C}$. Si determinino inoltre l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ e la matrice dell'isometria che porta l'equazione $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica.

Svolgimento. Si tratta dell'ellisse non degenere, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

essendo $\det A = -8$ e $\det A' = 24$. La matrice $A' = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ha gli autovalori 6 e 4, a cui corrispondono gli spazi di autovettori, ovvero i punti impropri $P_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $Q_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, le cui polari sono gli assi di $\mathcal{C}$. In particolare, poichè $-\frac{\det A'}{\det A} = 3 > 0$, la direzione dell'asse focale è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore più piccolo. Gli assi di $\mathcal{C}$ sono quindi

$$h_1 : 3x - 3y + 2 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad h_2 : x + y = 0.$$

Il centro è l'intersezione degli assi, ovvero il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In base a quanto visto, l'equazione canonica dell'ellisse $\mathcal{C}$ è quindi $\frac{X^2}{1/12} + \frac{Y^2}{1/18} = 1$. I fuochi sono i due punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{12} \\ \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}$. Infine, la matrice della trasformazione di coordinate è

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad -\frac{\det A'}{\det A}\, {}^tXAX = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 10. *Si consideri la parabola $\mathcal{P}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y = 0.$$

Si determini (se esiste) il cerchio $\mathcal{C}$, osculatore a $\mathcal{P}$ nel suo vertice.

Svolgimento. Il vertice è il punto di coordinate omogenee $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per determinare il cerchio $\mathcal{C}$ è sufficiente determinare quale tra i fasci di coniche osculatrici a $\mathcal{P}$ in V contiene un cerchio. La retta tangente a $\mathcal{P}$ in V è la polare di V, ovvero $t : 2x + 4y + 1 = 0$; una generica retta per P ha equazione $r_{(a,b)}$: $a(2x+1) + by = 0$ e quindi si tratta di determinare i parametri omogenei (a, b) affinchè il fascio determinato da $\mathcal{P}$ e dalla conica degenere $t \cdot r_{(a,b)}$ contenga un cerchio.

La generica conica di tale fascio ha matrice

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2a & 4a & 4a+b \\ 4a & 8a & 8a+2b \\ 4a+b & 8a+2b & 8b \end{pmatrix}$$

ed è un cerchio se, e solo se, i parametri omogenei (λ, μ) soddisfano alla condizione

$$\begin{cases} 4\lambda + 8a\lambda = \lambda + 8b\mu \\ -2\lambda + (8a+2b)\mu = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 3\lambda & +8(a-b)\mu & = 0 \\ & -\lambda & +(4a+b)\mu & = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema ammette una soluzione non banale nelle incognite λ e μ se, e solo se, il determinante della matrice (incompleta) è uguale a zero, ovvero se si ha $3(4a+b) + 8(a-b) = 0$, ovvero $a = 1$, $b = 4$; ed in tal caso si ha $\lambda = 8$ e $\mu = 1$. Da ciò si deduce che il cerchio osculatore ha equazione $\mathcal{C} : 5x^2 + 5y^2 + 3x - 4y + \frac{1}{4} = 0$. □

Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 16 febbraio 2000

ESERCIZIO 1. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la dimensione del sottospazio

$$U = \{\, B \in M_3(\mathbb{R}) \mid ABC = \mathbf{0} \,\}$$

e si determini una base di U.

Svolgimento. Si considerino gli spazi $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$ dotati delle rispettive basi canoniche e siano $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\phi_C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gli omomorfismi di matrici A e C rispettivamente. Allora il problema è equivalente a determinare il sottospazio $\mathscr{U}$ degli omomorfismi $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ per cui si abbia $\phi(\mathrm{im}(\phi_C)) \subseteq \ker(\phi_A)$, essendo $U = \{\, \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) \mid \phi \in \mathscr{U} \,\}$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ indica la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Osservando che $\mathrm{rk}\, A = 1$ e $\mathrm{rk}\, C = 2$, si conclude che $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{im}\phi_C, \ker\phi_A)$ ha dimensione 4. Inoltre, fissato un complementare $\langle u \rangle$ di $\mathrm{im}\phi_C$ in $\mathbb{R}^3$, un tale omomorfismo ϕ può mandare u su un qualunque elemento di $\mathbb{R}^3$ e quindi il sottospazio U ha dimensione $4 + 3 = 7$.

Si considerino le basi $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, definite ponendo

$$u_1 = 2e_2 + 3e_3, \quad u_2 = e_1 + 2e_3, \quad u_3 = e_3 \qquad \text{e} \qquad w_1 = 2e_1 - e_2, \quad w_2 = 4e_1 + e_3, \quad w_3 = e_3,$$

e si osservi che $\mathrm{im}\phi_C = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\ker\phi_A = \langle w_1, w_2 \rangle$. Allora, per un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si ha

$$\phi \in \mathscr{U} \iff \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ricordando che $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1)\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi)\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1)$, ed osservando che

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

si determina facilmente una base di U. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le cui matrici, rispetto alle basi canoniche, sono*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\psi = \phi \circ f$, ovvero tale da rendere commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathbb{R}^4 \arrow[dl, "\phi"] \\ & \mathbb{R}^3 & \end{tikzcd}$$

(b) *Si scrivano le matrici rispetto alle basi canoniche di tutte le applicazioni f (se esistono) soddisfacenti alla condizione del punto (a).*

Svolgimento. (a). Una tale f esiste se, e solo se, $\operatorname{im}\psi \subseteq \operatorname{im}\phi$. Infatti, se quest'ultima condizione è soddisfatta, per definire una tale f è sufficiente prendere tre vettori u_1, u_2, u_3 tali che $u_i \in \phi^{-1}(\psi(e_i))$, per $i = 1, 2, 3$, e porre $f(e_i) = u_i$. Due tali applicazioni f ed f', differiscono per un omomorfismo che manda ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ nel nucleo di ϕ.

Considerando ad esempio il minore estratto dalle utime tre colonne di A, si vede che $\operatorname{rk} A = 3$ quindi ϕ è suriettiva e perciò una tale f esiste.

(b). Dette b_1, b_2, b_3 le colonne della matrice B, per determinare una matrice di f dobbiamo risolvere separatamente i tre sistemi lineari $Ax = b_1$, $Ax = b_2$, $Ax = b_3$. Si tratta quindi di tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 3a & 3b & 3c \\ 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

al variare di (a, b, c) in $\mathbb{R}^3$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3, dotato dell'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da*

$$g(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Si determini, se esiste, una base ortogonale P_0, P_1, P_2, P_3 di V con $\deg P_i = i$ per $i = 0, \dots, 3$ e si scriva il polinomio $x^3 - 1$ come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Svolgimento. Poichè g è definita positiva e $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ è una base di V, esiste certamente una base ortogonale con la proprietà richiesta, e si può determinare, ad esempio, applicando la tecnica di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B}$. Il polinomio $P_0 = 1$ può essere preso come primo elemento della base ortogonale ed un polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è ortogonale a P_0 se, e solo se, $g(P, P_0) = \frac{2b}{3} + 2d = 0$. Dunque, sia $P_1 = x$ e si osservi che $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è ortogonale a P_1 se, e solo se, $g(P, P_1) = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = 0$. Si ponga quindi $P_2 = 3x^2 - 1$ e si osservi che $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è ortogonale a $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ se, e solo se, è ortogonale a $\langle 1, x, x^2 \rangle$ e si ha $g(P, x^2) = \frac{2b}{5} + \frac{2d}{3}$. Dunque $P_3 = 5x^3 - 3x$ è l'ultimo elemento della base cercata.

Infine, osserviamo che $x^3 - 1 = \frac{1}{5}P_3 + \frac{3}{5}P_1 + P_0$. □

ESERCIZIO 4. *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

Si consideri ora lo spazio vettoriale reale W con l'applicazione bilineare $h : W \times W \to \mathbb{R}$ di matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

Si dica se esiste un'isometria $\phi : W \to V$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice di una tale ϕ rispetto alle basi date.

Svolgimento. L'applicazione bilineare g è non degenere, essendo $\det G = 1$ ed osserviamo che il sottospazio $\langle v_1, v_3\rangle$ è isotropo. Dunque, g ha indice di inerzia 0 e quindi esiste un'isometria tra i due spazi. Per determinare una tale isometria è sufficiente determinare una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di V, rispetto a cui g abbia matrice H ed, in tal caso, un'isometria $\phi : W \to V$ è l'applicazione lineare, definita da $\phi(w_i) = u_i$ per $i = 1, \dots, 4$.

Consideriamo quindi i vettori

$$u_1 = -v_1, \qquad u_2 = v_1 + v_2, \qquad u_3 = \tfrac{3}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_3, \qquad u_4 = -5v_1 + 2v_2 - 3v_3 + 2v_4$$

rispetto a cui g ha matrice H ed è quindi facile scrivere la matrice dell'isometria ϕ descritta sopra, ovvero

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{C}^n$ con la forma hermitiana definita positiva standard $\langle v, w\rangle = {}^t\overline{w}v$ (cioè la forma hermitiana che rende la base canonica una base ortonormale) e sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice hermitiana (${}^t\overline{A} = A$).*

(a) Si mostri che per ogni vettore $v \in V$, si ha $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$ e che, indicati con α e β, rispettivamente, il minimo ed il massimo degli autovalori di A, si ha $\alpha \le \dfrac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \le \beta$ per ogni $v \in V$.

(b) Fissati comunque un sottospazio $W \subset V$ ed una sua base ortonormale $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_r\}$, si consideri il numero reale

$$R_A(W) = \sum_{i=1}^{r} \langle Aw_i, w_i\rangle \qquad [\textit{traccia di Rayleigh}].$$

Si mostri che la traccia di Rayleigh dipende solo dal sottospazio W e non dalla scelta di una sua base ortonormale.

Svolgimento. (a). Poichè A è una matrice hermitiana, dato un qualsiasi vettore $v \in V$, si ha

$$\overline{\langle Av, v\rangle} = \langle v, Av\rangle = \overline{{}^tv^tA}v = {}^t\overline{v}Av = \langle Av, v\rangle\,,$$

e quindi $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$. In particolare, da ciò si può dedurre il fatto che tutti gli autovalori di A sono reali.

Inoltre, sempre perchè A è hermitiana (e quindi autoaggiunta rispetto al pairing $\langle -, -\rangle$), esiste una base ortonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V di autovettori per la matrice A e siano $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$ i relativi autovalori. Dato un vettore $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$, si ha

$$\langle Av, v\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j v_j, \sum_{h=1}^{n} c_h v_h \right\rangle = \sum_{1\le j,h\le n} c_j\lambda_j\overline{c_h}\,\langle v_j, v_h\rangle = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\lambda_j$$

da cui si deduce che

$$\alpha\,\langle v, v\rangle = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \le \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\lambda_j \le \lambda_n \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 = \beta\,\langle v, v\rangle$$

che è quanto richiesto.

(b). È sufficiente osservare che $R_A(W)$ coincide con la traccia dell'applicazione composta

$$W \xrightarrow{\ j\ } V \xrightarrow{\ \phi\ } V \xrightarrow{\ \pi\ } W$$

ove $j : W \to V$ è l'inclusione naturale, $\phi : V \to V$ è l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica e $\pi : V \to W$ è la proiezione ortogonale da V sul sottospazio W. $\square$

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $\det(X\mathbf{1} - A) = (X - 3)^4$. Inoltre, si ha

$$A - 3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad (A-3)^2 = \mathbf{0}$$

da cui si vede che il polinomio minimo è $(X+3)^2$ e $\mathrm{rk}(A-3) = 2$. I vettori $v_1 = (\phi-3)(v_2) = 3e_1 - e_2 - e_3 + 3e_4$, $v_2 = e_2$, $v_3 = (\phi - 3)(v_4) = 2e_1 + 2e_4$ e $v_4 = e_1$ formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan J. Dunque le matrici

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

soddisfano alle condizioni poste. $\square$

ESERCIZIO 7. *Nel piano proiettivo reale si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determini una retta r affinché i quattro punti siano i vertici di un parallelogramma del piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r$.*
(b) *Si determinino due punti C e $\overline{C}$ di r affinché il quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$ sia un quadrato per la metrica euclidea sul piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r$ che ha C e $\overline{C}$ come punti ciclici.*

Svolgimento. (a). La retta r deve contenere i punti di intersezione tra i lati opposti del quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$, che diventano così rette parallele del piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r$. Essendo

$$(P_1 + P_2) \cap (P_3 + P_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{e} \qquad (P_1 + P_4) \cap (P_3 + P_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

la retta cercata ha equazione omogenea $r : x_0 - 5x_1 + 2x_2 = 0$.

(b). Un parallelogramma è un quadrato se i lati e le diagonali sono tra loro perpendicolari; quindi i punti ciclici C e $\overline{C}$ devono separare armonicamente sia le intersezioni dei lati del quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$ con r che le intersezioni delle due diagonali. Posto quindi

$$L_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = (P_1 + P_3) \cap r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D_2 = (P_2 + P_4) \cap r = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

i punti C e $\overline{C}$ sono determinati dalle condizioni $(L_1, L_2, C, \overline{C}) = -1 = (D_1, D_2, C, \overline{C})$.

Considerando su r il riferimento proiettivo che ha i punti L_1, L_2 e D_1 rispettivamente come punto improprio, origine e punto unità, il punto D_2 ha coordinata affine -1 e le coordinate affini x ed y di C e $\overline{C}$, sono soggette alle condizioni

$$\begin{cases} (\infty, 0, x, y) = -1 \\ (1, -1, x, y) = -1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = -y \\ xy = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce che i due punti cercati hanno coordinate affini i e $-i$ e quindi

$$C = \begin{pmatrix} -2 + 3i \\ i \\ 1 + i \end{pmatrix}, \qquad \overline{C} = \begin{pmatrix} -2 - 3i \\ -i \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 8. *Nel piano affine si considerino una conica a centro $\mathscr{C}$ ed una retta r, non passante per il centro C di $\mathscr{C}$. Detti P e Q i due punti di intersezione tra r e $\mathscr{C}$, sia s la retta passante per C ed il punto medio M del segmento PQ. Si verifichi che le tangenti alla conica nei punti di $s \cap \mathscr{C}$ sono parallele alla retta r.*

Svolgimento. Il problema è equivalente a dimostrare che il punto improprio della retta r è il polo della retta s. Poichè s passa per il centro, è chiaro che il suo polo appartiene alla polare del centro e quindi è un punto improprio. Inoltre, se $P \neq Q$, la polare del punto M taglia sulla retta r un punto S tale che $(P, Q, M, S) = -1$, ed essendo M il punto medio tra P e Q, il punto S è esattamente il punto improprio della retta r. Dunque S è l'intersezione tra la polare di C e la polare di M ed è quindi il polo di s.

Lasciamo al lettore il compito di discutere cosa accade nel caso in cui i due punti P e Q vengano a coincidere. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri l'iperbole $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y = 0.$$

Si determinino il centro, gli assi e gli asintoti di $\mathcal{C}$. Si determinino inoltre l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ e la matrice di un'isometria che porta gli assi coordinati sugli assi della conica.

Svolgimento. Si tratta dell'iperbole non degenere, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

essendo $\det A = 6 \cdot 25$ e $\det A' = -25$. La matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ha gli autovalori 5 e -5, a cui corrispondono gli spazi di autovettori, ovvero i punti impropri $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, le cui polari sono gli assi di

$\mathcal{C}$. In particolare, poichè $-\frac{\det A'}{\det A} = \frac{1}{6} > 0$, la direzione dell'asse focale è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore positivo. Gli assi di $\mathcal{C}$ sono quindi

$$h_1 : x - 3y + 2 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad \text{ed} \qquad h_2 : 3x + y + 4 = 0.$$

Il centro è l'intersezione degli assi, ovvero il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$. In base a quanto visto, $\mathcal{C}$ è un'iperbole equilatera di equazione canonica $\frac{5}{6}X^2 - \frac{5}{6}Y^2 = 1$.

Gli asintoti sono le polari dei due punti di intersezione tra $\mathcal{C}$ e la retta impropria, ovvero le polari di $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, cioè le rette

$$a_1 : x + 2y + 1 = 0 \qquad \text{ed} \qquad a_2 : 2x - y + 3 = 0.$$

Infine, la matrice della trasformazione di coordinate è

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{5} & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad -\frac{\det A'}{\det A}\, {}^tXAX = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

ESERCIZIO 10. *Si consideri il semipiano superiore $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$ e chiamiamo rette di H i semicerchi con centro sull'asse orizzontale oppure le semirette verticali.*

(a) Si mostri che per due punti di H passa una ed una sola retta di H.
(b) Ricordato che l'angolo tra due rette di H, incidenti in un punto P, è l'usuale angolo (euclideo) formato dalle tangenti alle due curve nel punto P, si determini l'equazione cartesiana della retta di H ortogonale a $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ e passante per il punto $X = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ $(\vartheta \in (0, \pi))$.

Svolgimento. (a). Siano dati due punti $P = (x_1, y_2)$ e $Q = (x_2, y_2)$ del semipiano superiore H. Se P e Q hanno la stessa ascissa ($x_1 = x_2$), allora la semiretta verticale per i due punti è la retta cercata. Altrimenti, dobbiamo determinare un punto $C = (c, 0)$ dell'asse orizzontale ed un raggio $r > 0$ affinchè i due punti dati stiano nella circonferenza di centro C e raggio r. Deve quindi aversi

$$\begin{cases} (x_1 - c)^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_2 - c)^2 + y_2^2 = r^2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} c = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2(x_1 - x_2)} + \frac{x_1 + x_2}{2} \\ r^2 = (x_1 - c)^2 + y_1^2 \end{cases}.$$

È chiaro che ciò determina univocamente c ed r.

(b). Indichiamo con t la retta tg a $\mathcal{C}$ in X, ovvero $t : x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - r = 0$. Se $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$, allora la tangente a $\mathcal{C}$ in X interseca l'asse orizzontale nel centro C del cerchio ortogonale, e quindi $C = (\frac{r}{\cos \vartheta}, 0)$. Il raggio del cerchio ortogonale è quindi la distanza R di C da X, ovvero $R = r |\operatorname{tg} \vartheta|$. Si determina così l'equazione cartesiana del cerchio ortogonale a $\mathcal{C}$, ovvero il cerchio $\mathcal{C}' : (x - \frac{r}{\cos \vartheta})^2 + y^2 = (r \operatorname{tg} \vartheta)^2$.

Osserviamo infine che, se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, allora la *retta* di H ortogonale a $\mathcal{C}$ è la semiretta verticale passante per X (e quindi per il centro di $\mathcal{C}$). $\square$