Corso di Matematica 2F per la Laurea in Fisica - esercizi per casa del 7 febbraio 2006

Cognome . . . . Nome . . . . Matricola . . . .

Lo studente è tenuto a consegnare l'elaborato svolto e firmato non più tardi di **Venerdì 10 febbraio 2006**, secondo le regole stabilite (alla lezione del mattino oppure non oltre le ore 13.00 nella casella della posta a nome "Candilera", al quarto piano del Dip. Matematica, edificio Paolotti).

Lo studente dichiara di aver svolto autonomamente l'elaborato presente. Firma: . . . .

Notazione: Nel seguito si indicheranno con $n_1, n_2, \dots, n_6$ le cifre del numero di matricola (ad esempio, se il proprio numero di matricola è 510243, $n_1 = 5$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$, $n_4 = 2$, $n_5 = 4$, $n_6 = 3$).

Esercizio (16 punti). Si determinino $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ in modo che $n_6 - n$ ed $n_5 - m$ siano multipli interi di 4.

Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} n \\ m \\ 0 \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ m \\ n \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(1) Si scrivano delle equazioni cartesiane per i sottospazi U e W, e si determinino $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U \cap W)$, $\dim(U + W)$. È vero che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$?

(2) Si mostri che, per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$, esistono $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$ e si determinino tali vettori quando $v = v_0 = \begin{pmatrix} n \\ 2m \\ 3m \\ 4n \end{pmatrix}$. Si scrivano delle formule esplicite per le coordinate dei vettori u e w quando $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ è un generico vettore di $\mathbb{R}^4$.

(3) Sia $\pi_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione che manda $v \in \mathbb{R}^4$ in un vettore $u \in U$ tale che $v - u \in W$. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_1)$, ove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e si determinino nucleo ed immagine di π_1. È vero che $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$?

(4) Sia $\pi_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita ponendo $\pi_2(v) = v - \pi_1(v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. Posto $\sigma_1(v) = \pi_1(v) - \pi_2(v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. Si determinino le matrici $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_2)$, $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_1)$, e si calcoli $\sigma_1(v_0)$, ove v_0 è il vettore definito al punto 2. Si determini il più grande sottospazio H di $\mathbb{R}^4$ tale che $\sigma_1(x) = x$ per ogni $x \in H$. Si determini $\sigma_1 \circ \sigma_1$. Posto $\sigma_2(v) = \pi_2(v) - \pi_1(v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, si risponda alle stesse domande.