Corso di Matematica 2F per la Laurea in Fisica - esercizi per casa del 28 febbraio 2006

Cognome . . . . Nome . . . . Matricola . . . .

Lo studente è tenuto a consegnare l'elaborato svolto e firmato non più tardi di **Venerdì 3 marzo 2006**, secondo le regole stabilite (alla lezione del mattino oppure non oltre le ore 13.00 nella casella della posta a nome "Candilera", al quarto piano del Dip. Matematica, edificio Paolotti).

Lo studente dichiara di aver svolto autonomamente l'elaborato presente. Firma: . . . .

Notazione: Nel seguito si indicheranno con $n_1, n_2, \dots, n_6$ le cifre del numero di matricola (ad esempio, se il proprio numero di matricola è 541023, $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$, $n_5 = 2$, $n_6 = 3$).

Esercizio (16 punti). Si determinino $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ in modo che $n_6 - n$ ed $n_5 - m$ siano multipli interi di 4.

È data l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^5$ in sé, rappresentata dalla seguente matrice in base canonica

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1-m & -1-m \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ -1-m & n-m & m & -1-m & -1-m \\ m-n & 0 & 0 & m-n-1 & m-n \\ n-m & 0 & 0 & n+1 & n \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare il polinomio caratteristico, $p_\phi(X)$, e dire se ϕ è invertibile.

(2) Determinare nullità, molteplicità ed una base del relativo autospazio per ogni autovalore di ϕ. Determinare il polinomio minimo e dire se ϕ è o meno diagonalizzabile.

(3) Se ϕ non è diagonalizzabile, determinare, per ogni autovalore, un autovettore generalizzato, ad esso relativo, di periodo massimo. Se ϕ è diagonalizzabile, determinare una matrice invertibile, P, ed una matrice diagonale, D, tali che $D = P^{-1}AP$.

(4) Per ogni autovalore si fissi una base ortonormale dello spazio di autovettori ad esso relativo e siano, $v_1, \dots, v_k$, gli autovettori per ϕ così determinati. Calcolare il volume k-dimensionale del simplesso,

$$\Delta = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j v_j \;\middle|\; a_j \in [0,1],\ a_1 + \cdots + a_k \leq 1 \right\}.$$