A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

Docenti: Candilera, Fiorot, Longo, Menegazzo, Novelli

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f\colon V \to W$, dimostrare che l'immagine di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione
$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad a + ib \mapsto b - ia$$
è lineare? Motivare la risposta.
3. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare e siano $v_1, \ldots, v_s$ vettori di V, e poniamo $w_1 = f(v_1), \ldots, w_s = f(v_s)$. Si dimostri che se $w_1, \ldots, w_s$ sono linearmente indipendenti, allora $\langle v_1, \ldots, v_s\rangle \cap Ker(f) = \{0_V\}$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(1 + 2i)z^5 = -14 + 7i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4
$$\Sigma_\alpha\colon \begin{cases} x_1 - \alpha\, x_3 = 0 \\ x_1 + (\alpha+1)\, x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha^2+\alpha)\, x_3 + \alpha\, x_4 = \alpha \\ x_1 - \alpha\, x_3 + \alpha\, x_4 = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare di α, il rango della matrice incompleta dei coefficienti del sistema lineare associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α.

(b) Determinare, al variare di α, le soluzioni di Σ_α.

(c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

(a) Determinare, al variare di α, una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α, se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

(b) Determinare, al variare di α, $f_\alpha^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Per $\alpha = 1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_1 sia $\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
$\dim W = 2$, $f_0(W) = Imf_0$ e $f_{-1}(W) = Imf_{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\2\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 + 13x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.

(c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.

(d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.

(e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

Docenti: Candilera, Fiorot, Longo, Menegazzo, Novelli

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f\colon V \to W$, dimostrare che il nucleo di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione
$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad a + ib \mapsto -b + ia$$
è lineare? Motivare la risposta.
3. È data una funzione lineare $f : V \to W$. Siano $v_1, \dots, v_s$ vettori di V, e poniamo $w_1 = f(v_1), \dots, w_s = f(v_s)$. Si dimostri che se $\langle w_1, \dots, w_s\rangle = Im(f)$, allora $V = \langle v_1, \dots, v_s\rangle + Ker(f)$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(2i - 1)z^5 = 10 + 5i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4
$$\Sigma_\alpha\colon \begin{cases} x_1 + \alpha\, x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\alpha)\, x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha^2 - \alpha)\, x_3 - \alpha\, x_4 = -\alpha \\ x_1 + \alpha\, x_3 - \alpha\, x_4 = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare di α, il rango della matrice incompleta dei coefficienti del sistema lineare associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α.

(b) Determinare, al variare di α, le soluzioni di Σ_α.

(c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

(a) Determinare, al variare di α, una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α, se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

(b) Determinare, al variare di α, $f_\alpha^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Per $\alpha = -1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_{-1} sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
$\dim W = 2$, $f_0(W) = Imf_0$ e $f_1(W) = Imf_1$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} 13x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.

(c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.

(d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.

(e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

Docenti: Candilera, Fiorot, Longo, Menegazzo, Novelli

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f\colon V \to W$, dimostrare che il nucleo di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione
$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad a+ib \mapsto (a+ib)^2$$
è lineare? Motivare la risposta.
3. Supponiamo che la funzione lineare $f : V \to W$ sia suriettiva. Siano $w_1, \dots, w_s$ vettori di W, e scegliamo $v_1, \dots, v_s$ in V tali che $w_1 = f(v_1), \dots, w_s = f(v_s)$. Si dimostri che se $\langle v_1, \dots, v_s\rangle + Ker(f) = V$, allora $\langle w_1, \dots, w_s\rangle = W$;

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(1-3i)z^5 = 12+4i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4
$$\Sigma_\alpha\colon \begin{cases} x_1 + 2\alpha\, x_3 = 0 \\ x_1 + (1-2\alpha)\, x_2 + \ x_3 = 0 \\ (4\alpha^2 - 2\alpha)\, x_3 - 2\alpha\, x_4 = -2\alpha \\ x_1 + 2\alpha\, x_3 - 2\alpha\, x_4 = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare di α, il rango della matrice incompleta associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α.

(b) Determinare, al variare di α, le soluzioni di Σ_α.

(c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

(a) Determinare, al variare di α, una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α, se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

(b) Determinare, al variare di α, $f_\alpha^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -2\alpha & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Per $\alpha = 1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_1 sia $\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
$\dim W = 2$, $f_0(W) = Imf_0$ e $f_{\frac{1}{2}}(W) = Imf_{\frac{1}{2}}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - 13x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.

(c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.

(d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.

(e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

Docenti: Candilera, Fiorot, Longo, Menegazzo, Novelli

I prova parziale – 20 Aprile 2013

DOMANDE

1. Data una funzione lineare $f\colon V \to W$, dimostrare che l'immagine di f è un sottospazio.
2. Pensiamo il campo complesso $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione
$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad a + ib \mapsto a^2 + ib^2$$
è lineare? Motivare la risposta.
3. Supponiamo che la funzione lineare $f : V \to W$ sia suriettiva. Siano $w_1, \dots, w_s$ vettori di W, e $v_1, \dots, v_s$ in V, linearmente indipendenti, tali che $w_1 = f(v_1), \dots, w_s = f(v_s)$. Si dimostri che se $\langle v_1, \dots, v_s\rangle \cap Ker(f) = \{0\}$, allora $w_1, \dots, w_s$ sono linearmente indipendenti.

ESERCIZI

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $(3i + 1)z^5 = 18 - 6i$.

Esercizio 2. Si consideri, variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4
$$\Sigma_\alpha\colon \begin{cases} x_1 - 2\alpha\ x_3 = 0 \\ x_1 + (1 + 2\alpha)\ x_2 + x_3 = 0 \\ (4\alpha^2 + 2\alpha)\ x_3 + 2\alpha\ x_4 = 2\alpha \\ x_1 - 2\alpha\ x_3 + 2\alpha\ x_4 = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare, al variare di α, il rango della matrice incompleta associata a Σ_α ed il rango della matrice completa associata a Σ_α.

(b) Determinare, al variare di α, le soluzioni di Σ_α.

(c) Dire se esistono valori di α tali che l'insieme delle soluzioni di Σ_α è uguale al sottospazio vettoriale $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^4$. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \}$ la base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sia la matrice incompleta del sistema lineare dell'esercizio precedente.

(a) Determinare, al variare di α, una base per il nucleo, una base per l'immagine, la dimensione del nucleo, la dimensione dell'immagine. Stabilire, al variare di α, se l'applicazione è iniettiva, se è suriettiva, se è un isomorfismo.

(voltare pagina)

(b) Determinare, al variare di α, $f_\alpha^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2\alpha & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Per $\alpha = 1$, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ed una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alle quali la matrice associata ad f_1 sia $\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Determinare, se possibile, un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che:
$\dim W = 2$, $f_0(W) = Imf_0$ e $f_{-\frac{1}{2}}(W) = Imf_{-\frac{1}{2}}$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi.

(b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi.

(c) Aggiungere il minimo numero di equazioni ad un sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta.

(d) Sia T un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $(T \cap U) \oplus W = U \oplus (T \cap W)$. Dimostrare che $(T \cap U) \oplus W = U + W$.

(e) Sia T come nel punto precedente è vero che $U + W = T \oplus (U \cap W)$?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- La durata del compito è di 2 ore e 15 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.