A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale
Canali 1 e 2 – Docenti: Candilera, Fiorot

appello del 19 Giugno 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di vettori linearmente indipendenti;
   b) definizione di matrici simili.
2. Dimostrare che dato $T \leq \mathbb{R}^n$ vale:
$$\mathbb{R}^n = T \oplus T^{\perp}$$
3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice tale che $A^2 = A \cdot A = 0$, ma $A \neq 0$. Determinare gli autovalori complessi di A e dimostrare che A non è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 - x^3 + x - 1 = 0$$

(3 punti)

Esercizio 2. Si considerino le rette r_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ e t di equazioni cartesiane:

$$r_a : \begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 = a \\ ax_2 - x_3 = a + 1 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r_a e t al variare di $a \in \mathbb{R}$ ed eventuali punti di intersezione. (3 punti)

(b) Posto $a = 0$ calcolare i punti di minima distanza $R \in r_0$ e $T \in t$ fra la retta r_0 e la retta t e la loro distanza. (3 punti)

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U_t = \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_W$ di W, dimensione di W e per ogni $t \in \mathbb{R}$ una base $\mathcal{B}_{U_t}$ di U_t e la dimensione di U_t. (3 punti)

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che U_t e W NON siano in somma diretta. Per tali valori determinare una base $\mathcal{B}_{U_t \cap W}$ e completare tale base ad una base $\mathcal{B}_{U_t + W}$. (3 punti)

(c) Determinare, se esiste, un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $\forall t \geq 1$

$$U_t \oplus T = W \oplus T = \mathbb{R}^4$$

(2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si consideri un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1-k & k & k^2-1 \\ 1 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f_k)$. f_k è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? (2 punti)
2. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tale valore determinare una base ortonormale di autovettori. (3 punti)
3. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che f_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. (4 punti)
4. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A_k sia ortogonale. (2 punti)
5. Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel codominio sia

$$\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(f_k) = B_k = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2-1 \\ k & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

bozza per I appello – 19 Giugno 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di spazio vettoriale finitamente generato;

   b) definizione di matrice diagonalizzabile.

2. Dimostrare che dato $S \leq \mathbb{R}^n$ vale:
$$\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$$

3. Sia $B \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice tale che $2B^2 = 2B \cdot B = 0$, ma $B \neq 0$. Determinare gli autovalori complessi di B e dimostrare che B non è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:
$$-x^4 + x^3 - x + 1 = 0$$
(3 punti)

Esercizio 2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, si considerino le rette r_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ e t di equazioni cartesiane:
$$r_a : \begin{cases} -x_1 + x_2 + ax_3 = a \\ ax_1 - x_3 = a + 1 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r_a e t al variare di $a \in \mathbb{R}$ ed eventuali punti di intersezione. (3 punti)

(b) Posto $a = 0$ calcolare i punti di minima distanza $R \in r_0$ e $T \in t$ fra la retta r_0 e la retta t e la loro distanza. (3 punti)

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:
$$U_t = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \rangle \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_W$ di W, dimensione di W e per ogni $t \in \mathbb{R}$ una base $\mathcal{B}_{U_t}$ di U_t e la dimensione di U_t. (3 punti)

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che U_t e W NON siano in somma diretta. Per tali valori determinare una base $\mathcal{B}_{U_t \cap W}$ e completare tale base ad una base $\mathcal{B}_{U_t + W}$. (3 punti)

(c) Determinare, se esiste, un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $\forall t \geq 1$
$$U_t \oplus T = W \oplus T = \mathbb{R}^4$$
(2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si consideri un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2-1 & 1-k & k \\ k-1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f_k)$. f_k è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? (2 punti)
2. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tale valore determinare una base ortonormale di autovettori. (3 punti)
3. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che f_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. (4 punti)
4. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A_k sia ortogonale. (2 punti)
5. Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel codominio sia

$$\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(f_k) = B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2-k & 1-k & k \\ k & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

(3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

bozza per I appello – 19 Giugno 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di base di uno spazio vettoriale finitamente generato;

   b) definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile.

2. Dimostrare che dato $V \leq \mathbb{R}^n$ vale:
$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$$

3. Sia $C \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice tale che $-C^2 = -C \cdot C = 0$, ma $C \neq 0$. Determinare gli autovalori complessi di C e dimostrare che C non è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = 0$$

(3 punti)

Esercizio 2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, si considerino le rette r_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ e t di equazioni cartesiane:

$$r_a : \begin{cases} ax_1 + x_3 - x_2 = a \\ -x_1 + ax_2 = a + 1 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r_a e t al variare di $a \in \mathbb{R}$ ed eventuali punti di intersezione. (3 punti)

(b) Posto $a = 0$ calcolare i punti di minima distanza $R \in r_0$ e $T \in t$ fra la retta r_0 e la retta t e la loro distanza. (3 punti)

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U_t = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_W$ di W, dimensione di W e per ogni $t \in \mathbb{R}$ una base $\mathcal{B}_{U_t}$ di U_t e la dimensione di U_t. (3 punti)

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che U_t e W NON siano in somma diretta. Per tali valori determinare una base $\mathcal{B}_{U_t \cap W}$ e completare tale base ad una base $\mathcal{B}_{U_t + W}$. (3 punti)

(c) Determinare, se esiste, un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $\forall t \geq 1$

$$U_t \oplus T = W \oplus T = \mathbb{R}^4$$

(2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si consideri un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ k & k-1 & 0 \\ k^2-1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f_k)$. f_k è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? (2 punti)
2. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tale valore determinare una base ortonormale di autovettori. (3 punti)
3. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che f_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. (4 punti)
4. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A_k sia ortogonale. (2 punti)
5. Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel codominio sia

$$\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(f_k) = B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k^2-k & 1-k & k \\ k & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

(3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

bozza per I appello – 19 Giugno 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di vettori linearmente dipendenti;

   b) definizione di autovalore e autovettore di un endomorfismo.

2. Dimostrare che dato $U \leq \mathbb{R}^n$ vale:
$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

3. Sia $M \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice tale che $3M^2 = 3M \cdot M = 0$, ma $M \neq 0$. Determinare gli autovalori complessi di M e dimostrare che M non è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$-x^4 - x^3 + x + 1 = 0$$

(3 punti)

Esercizio 2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, si considerino le rette r_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ e t di equazioni cartesiane:

$$r_a : \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 = a \\ -x_2 + ax_3 = a + 1 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r_a e t al variare di $a \in \mathbb{R}$ ed eventuali punti di intersezione. (3 punti)

(b) Posto $a = 0$ calcolare i punti di minima distanza $R \in r_0$ e $T \in t$ fra la retta r_0 e la retta t e la loro distanza. (3 punti)

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U_t = \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_W$ di W, dimensione di W e per ogni $t \in \mathbb{R}$ una base $\mathcal{B}_{U_t}$ di U_t e la dimensione di U_t. (3 punti)

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che U_t e W NON siano in somma diretta. Per tali valori determinare una base $\mathcal{B}_{U_t \cap W}$ e completare tale base ad una base $\mathcal{B}_{U_t + W}$. (3 punti)

(c) Determinare, se esiste, un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $\forall t \geq 1$

$$U_t \oplus T = W \oplus T = \mathbb{R}^4$$

(2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si consideri un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k^2-1 & k-1 \\ 0 & 1-k & k \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f_k)$. f_k è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? (2 punti)
2. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che f_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tale valore determinare una base ortonormale di autovettori. (3 punti)
3. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che f_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. (4 punti)
4. Determinare un valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A_k sia ortogonale. (2 punti)
5. Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel codominio sia

$$\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(f_k) = B_k = \begin{pmatrix} k^2 & k^2-1 & k-1 \\ 1-k & 1-k & k \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

(3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.