A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE; CANALI 1 E 2
DOCENTI: M. CANDILERA, L. FIOROT

5 Luglio 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di sottospazio U di un K-spazio vettoriale V;
   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots w_m\}$ di W.
2. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori linearmente indipendenti e $u \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ allora i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n, u$ sono linearmente indipendenti.
3. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonalizzabile invertibile. Dimostrare che allora anche A^{-1} è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z = \bar{z}^3$$

e disegnarle nel piano di Argand Gauss. (4 punti)

Esercizio 2. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la retta

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ -2y + z = 5 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta r. (3 punti)

(b) Determinare la distanza di r dall'origine. (3 punti)

(c) Determinare, se esistono, tutti i piani passanti per l'origine e aventi distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla retta r. (3 punti)

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)
2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorfismo f è iniettivo; è suriettivo; è biiettivo? (2 punti)
3. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto a tale base sia
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(3 punti)
4. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che esista un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ f_k tale che:
$$f_k^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
che sia diagonalizzabile, ma non ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Sia $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| \begin{matrix} a+b=0 \\ c+d=0 \end{matrix} \right\}\rangle \qquad V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| b=0 \right\}\rangle$$

e

$$W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix} \right) \rangle$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $T \oplus U = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e la proiezione del vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALI 1 e 2
Docenti: M. Candilera, L. Fiorot

5 Luglio 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di ortogonale di un sottospazio T di $\mathbb{R}^n$;
   b) definizione di matrice di cambiamento di base (fissato V un K-spazio vettoriale e $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots w_n\}$ basi di V la matrice di cambio di base dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$ è ...).
2. Dimostrare la formula di Grasmann: dato V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e V_1, V_2 due suoi sottospazi allora
$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$
3. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonalizzabile. Dimostrare che allora anche A^2 è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:
$$z^3 = \bar{z}$$
e disegnarle nel piano di Argand Gauss. (4 punti)

Esercizio 2. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la retta
$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y - 2z = 5 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta r. (3 punti)

(b) Determinare la distanza di r dall'origine. (3 punti)

(c) Determinare, se esistono, tutti i piani passanti per l'origine e aventi distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla retta r. (3 punti)

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:
$$f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)
2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorfismo f è iniettivo; è suriettivo; è biiettivo? (2 punti)
3. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto a tale base sia
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(3 punti)
4. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che esista un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ f_k tale che:
$$f_k^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
che sia diagonalizzabile, ma non ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Sia $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a+c=0 \\ b+d=0 \end{matrix} \right\}\rangle \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c=0 \right\}\rangle$$

e

$$W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rangle$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $T \oplus U = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e la proiezione del vettore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola __________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALI 1 e 2
Docenti: M. Candilera, L. Fiorot

5 Luglio 2013

DOMANDE

1. **a)** Scrivere la definizione di endomorfismo;
   b) enunciare il teorema di Rouché Capelli.
2. Dimostrare che se $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti e generatori di un K-spazio vettoriale V allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{G}_1 \subset G$ con $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}$ di generatori di V.
3. Sia $H \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonalizzabile invertibile. Dimostrare che allora anche H^{-2} è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$-z^3 = \bar{z}$$

e disegnarle nel piano di Argand Gauss. (4 punti)

Esercizio 2. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la retta

$$r : \begin{cases} y + z = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta r. (3 punti)

(b) Determinare la distanza di r dall'origine. (3 punti)

(c) Determinare, se esistono, tutti i piani passanti per l'origine e aventi distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla retta r. (3 punti)

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)
2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorfismo f è iniettivo; è suriettivo; è biiettivo? (2 punti)
3. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto a tale base sia
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(3 punti)
4. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che esista un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ f_k tale che:
$$f_k^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \right\rangle$$
che sia diagonalizzabile, ma non ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Sia $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| \begin{matrix} a+b=0 \\ c+d=0 \end{matrix} \right\} \rangle \qquad V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| a = 0 \right\} \rangle$$

e

$$W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix} \right) \rangle$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $T \oplus U = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e la proiezione del vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALI 1 e 2
Docenti: M. Candilera, L. Fiorot

5 Luglio 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di somma di due sottospazi S e T di un K-spazio vettoriale V;

   b) definizione di $f^{-1}\{w\}$ ove $f : V \to W$ è un'applicazione lineare tra due K-spazi vettoriali V e W; mentre $w \in W$.

2. Dimostrare che ogni matrice di cambiamento di base è invertibile.

3. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonalizzabile. Dimostrare che allora anche A^3 è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z^3 = -\bar{z}$$

e disegnarle nel piano di Argand Gauss. (4 punti)

Esercizio 2. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la retta

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + z = 5 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta r. (3 punti)

(b) Determinare la distanza di r dall'origine. (3 punti)

(c) Determinare, se esistono, tutti i piani passanti per l'origine e aventi distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla retta r. (3 punti)

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)

2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorfismo f è iniettivo; è suriettivo; è biiettivo? (2 punti)

3. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto a tale base sia

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3 punti)

4. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che esista un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ f_k tale che:

$$f_k^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

che sia diagonalizzabile, ma non ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Sia $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| \begin{matrix} a+d=0 \\ b+c=0 \end{matrix} \right\}\rangle \qquad V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| d=0 \right\}\rangle$$

e

$$W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix} \right) \rangle$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $T \oplus U = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e la proiezione del vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right)$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.