A

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALI 1 e 2
Docenti:M. Candilera, L. Fiorot

5 Luglio 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di sottospazio U di un K-spazio vettoriale V;

   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_m\}$ di W.

2. Siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori linearmente indipendenti e $u \notin \langle v_1, v_2, \dots, v_n\rangle$ allora i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n, u$ sono linearmente indipendenti.

3. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonalizzabile invertibile. Dimostrare che allora anche A^{-1} è diagonalizzabile.

Risposte. (1.a) Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme non vuoto, U, tale che la restrizione a U delle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite su V renda U un K-spazio vettoriale.
(1.b) La matrice $\alpha_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f)$ è la matrice $m \times n$ che ha come colonne le coordinate nella base d'arrivo, $\mathcal{B}_W$, delle immagini $f(v_1), \dots, f(v_n)$ dei vettori della base di partenza.

Più precisamente, se $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$, per $j = 1, \dots, n$, allora la matrice $\alpha_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f)$ è

$$\alpha_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(2) Se i vettori $v_1, \dots, v_n, u$ non fossero linearmente indipendenti, esisterebbe una combinazione lineare $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + bu = 0$, con i coefficienti $a_1, \dots, a_n, b$, non tutti nulli. Se fosse $b = 0$, allora avrei una combinazione lineare non banale di $v_1, \dots, v_n$ che si annulla, contro l'ipotesi che quei vettori siano indipendenti. Se fosse $b \neq 0$, potrei scrivere u come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, contro l'ipotesi che $u \notin \langle v_1, \dots, v_n\rangle$. In ogni caso avrei una contraddizione con le ipotesi. Quindi $v_1, \dots, v_n, u$ sono linearmente indipendenti

(3) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ è una matrice diagonalizzabile e invertibile, esistono una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$ e le entrate di D sulla diagonale (gli autovalori di$A$) siano tutte diverse da 0. Quindi D^{-1} è una matrice diagonale (che ha sulla diagonale gli inversi degli autovalori di A) e $D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, da cui si conclude che anche A^{-1} è diagonalizzabile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z = \bar{z}^3$$

e disegnarle nel piano di Argand Gauss. (4 punti)

Svolgimento. È evidente che 0 è una soluzione. Sia quindi $0 \neq z = \rho e^{it}$ (con $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ e $t \in \mathbb{R}$). L'equazione impone $\rho = \rho^3$ la cui unica soluzione reale e positiva è $\rho = 1$. In tal caso $\bar{z} = z^{-1}$ e quindi l'equazione è equivalente a $z^4 = 1$, che ha quattro soluzioni in $\mathbb{C}$, ovvero $1, i, -1, -i$. Lasciamo al lettore il compito di disegnare le cinque soluzioni nel piano di Gauss.

* * *

Esercizio 2. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la retta

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ -2y + z = 5 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta r. (3 punti)

(b) Determinare la distanza di r dall'origine. (3 punti)

(c) Determinare, se esistono, tutti i piani passanti per l'origine e aventi distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla retta r. (3 punti)

Svolgimento. (a) $r = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. La retta t è l'intersezione del piano ortogonale a r, passante per l'origine, ovvero $\pi : x - y - 2z = 0$; con il piano contenente r e passante per l'origine, ovvero $\tau : 5x + 7y - z = 0$. Le equazioni cartesiane sono quindi $t = \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 5x + 7y - z = 0 \end{cases}$.

(b) Il punto di r a minima distanza dall'origine è $r \cap \pi$, ovvero $P = \left(\begin{smallmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. La distanza è quindi $\|P - O\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

(c) Un piano e una retta hanno distanza positiva se, e solo se, sono paralleli. Quindi i piani cercati appartengono al fascio di piani che ha come asse la retta parallela a r passante per l'origine, ovvero i piani di equazioni $a(x + y) + b(2y - z) = 0$. La loro distanza dalla retta è la distanza da un qualsiasi punto di r e quindi i parametri a e b sono determinati dalla condizione

$$\frac{|a - 5b|}{\sqrt{a^2 + (a + 2b)^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{ovvero} \qquad b(8a - 15b) = 0;$$

che porge i due piani $x + y = 0$ e $15x + 31y - 8z = 0$.

* * *

Esercizio 3. Si consideri un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f^{-1}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. (3 punti)
2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorfismo f è iniettivo; è suriettivo; è biiettivo? (2 punti)
3. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto a tale base sia
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(3 punti)
4. Determinare tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che esista un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ f_k tale che:
$$f_k^{-1}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$$
che sia diagonalizzabile, ma non ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

Svolgimento. (1) Data un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ed un vettore $w \in \operatorname{im} f$,

$$f^{-1}\{w\} = \left\{\, v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = w \,\right\} = v_0 + \ker f,$$

ove v_0 è un qualsiasi vettore nella controimmagine di w. Dunque, dal testo ricaviamo che,

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I tre vettori ad argomento sono una base di $\mathbb{R}^3$ e quindi è ben definito un unico endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e la sua matrice in base canonica è $A = \alpha_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.
(2) Per quanto già detto, $\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\operatorname{im} f = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e i generatori indicati sono basi dei rispettivi spazi. In particolare, f non è né iniettiva, né suriettiva.
(3) La matrice A è simmetrica; la matrice D è diagonale e ha sulla diagonale gli autovalori di f, con le giuste molteplicità. Quindi esiste una base ortonormale per cui la matrice di f è uguale a D. Ad esempio, si prenda $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(4) Perché f_k esista è necessario (e sufficiente) che i tre vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ siano una base di $\mathbb{R}^3$; e ciò è vero per ogni valore di k. In tal caso f_k è diagonalizzabile, perché ha gli autovalori 0 e 1 con $m_a(1) = 1 = m_g(1)$ e $m_a(0) = 2 = m_g(0)$. È ortogonalmente diagonalizzabile se, e solo se, $\langle u_1 \rangle^\perp = \langle u_2, u_3 \rangle$; e ciò accade se, e solo se, $k = 1$.

* * *

Esercizio 4. Sia $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a+b=0 \\ c+d=0 \end{matrix} \right\}\rangle \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| b=0 \right\}\rangle$$

e

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $T \oplus U = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e la proiezione del vettore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

Svolgimento. (a) L'intersezione $U \cap V$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di rango 3 in 4 incognite. Quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, è un sottospazio di dimensione 1 ed una sua base è $\mathcal{B}_{U\cap V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
Il sottospazio W è contenuto in V ed ha dimensione 3. Dunque $V = W = V \cap W$ e possiamo prendere la base $\mathcal{B}_{V\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Di conseguenza, possiamo prendere $\mathcal{B}_{U\cap W} = \mathcal{B}_{U\cap V}$.
In nessun caso l'intersezione si riduce alla matrice nulla e quindi non si ha mai somma diretta.
(b) Per la Formula di Grassmann, $\dim(U + V) = 2 + 3 - 1 = 4$ e quindi, possiamo prendere

$$\mathcal{B}_{U+V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Il sottospazio T deve avere dimensione 2 e intersezione banale con U. Inoltre, deve contenere la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Possiamo quindi prendere $T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, ma la scelta non è unica.

* * *