A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1
Docente:Maurizio Candilera

10 settembre 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di base di un K-spazio vettoriale V;
   b) definizione di matrice simmetrica e di matrici ortogonalmente simili.
2. Siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali si dimostri che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
3. Si scriva la definizione di matrice ortogonale. Sia $XA = B$ con A, B, X in $M_3(\mathbb{R})$ e A invertibile. Si dimostri che X è ortogonale se, e solo se, $A^T A = B^T B$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $2z = z^4$ e disegnarli nel piano di Argand Gauss. (3 punti)

* * *

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$

$$U = \left\{ P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P(-1) = P(1) = 0 \right\}$$
$$V = \left\{ P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P'(0) = 0 \right\} \quad (P'(X) \text{ è la derivata di } P(X))$$
$$W = \left\langle X^3 + X^2 + 1,\ X^3 + X^2 - 1,\ X^3 + 2X^2 - 1,\ X^3 + X^2 - 2 \right\rangle.$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ e la proiezione del vettore $X^3 + X^2 + X + 1$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $X^3 - X$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

* * *

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_t di $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 2t-1 & t & t \end{pmatrix}$$

in base canonica.

(voltare pagina)

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui f_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (5 punti)
2. Determinare i valori di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori per f_t e si scriva una tale base. (2 punti)
3. Si considerino le matrici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Si determini, se esiste, una coppia di numeri reali (a, b) per cui le due matrici siano simili. (3 punti)

* * *

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} x - y = -1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : 3x - y - z = 9.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta s. (3 punti)

(c) Determinare, la distanza tra t e r. Si dica come trovare una retta, h, incidente sia t che r, che formi angoli uguali con entrambe. Una tale retta è unica? (4 punti)

* * *

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1
Docente:Maurizio Candilera

10 settembre 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di base di un K-spazio vettoriale V;
   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_m\}$ di W.
2. Siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali si dimostri che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
3. Sia A una matrice diagonalizzabile in $M_n(\mathbb{R})$. È vero che $A^2 + \mathbf{1}_n$ è una matrice diagonalizzabile? (giustificare la risposta)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $2z + z^4 = 0$ e disegnarli nel piano di Argand Gauss. (3 punti)

* * *

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$

$$U = \left\{ P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P(-2) = P(2) = 0 \right\}$$
$$V = \left\{ P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P''(0) = 0 \right\} \quad (P''(X) \text{ è la derivata seconda di } P(X))$$
$$W = \left\langle 4X^3 + X + 1,\ 4X^3 + X - 1,\ 4X^3 + 2X - 1,\ 4X^3 + X - 2 \right\rangle.$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ e la proiezione del vettore $X^3 + X^2 + X + 1$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $X^3 - 4X$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

* * *

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_t di $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 2t-1 & t \end{pmatrix}$$

in base canonica.

(voltare pagina)

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui f_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (5 punti)
2. Determinare i valori di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori per f_t e si scriva una tale base. (2 punti)
3. Si considerino le matrici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

   Si determini, se esiste, una coppia di numeri reali (a, b) per cui le due matrici siano simili. (3 punti)

* * *

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : x + y - 3z = -9.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta s. (3 punti)

(c) Determinare, la distanza tra t e r. Si dica come trovare una retta, h, incidente sia t che r, che formi angoli uguali con entrambe. Una tale retta è unica? (4 punti)

* * *

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1

Docente:Maurizio Candilera

10 settembre 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di base di un K-spazio vettoriale V;
   b) definizione di autovalore e autovettore.
2. Sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$. È vero che i vettori $v_1 - 2v_2 + 3v_3 - \cdots + (-1)^{n-1} n v_n, v_2, \ldots, v_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$?
3. Si scriva la definizione di matrice ortogonale. Sia $XA = B$ con A, B, X in $M_3(\mathbb{R})$ e A invertibile. Si dimostri che X è ortogonale se, e solo se, $A^T A = B^T B$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $3z + z^4 = 0$ e disegnarli nel piano di Argand Gauss. (3 punti)

* * *

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$

$$U = \left\{ P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P(-1) = P(1) = 0 \right\}$$
$$V = \left\{ P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P''(0) = 0 \right\} \quad (P''(X) \text{ è la derivata seconda di } P(X))$$
$$W = \left\langle X^3 + 2X + 1,\ X^3 + 2X - 1,\ 2X^3 + X + 2,\ 2X^3 + X - 2 \right\rangle.$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ e la proiezione del vettore $X^3 + X^2 + X + 1$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $X^3 - X$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

* * *

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_t di $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} t & t & 2t-1 \\ 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

(voltare pagina)

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui f_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (5 punti)
2. Determinare i valori di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori per f_t e si scriva una tale base. (2 punti)
3. Si considerino le matrici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Si determini, se esiste, una coppia di numeri reali (a, b) per cui le due matrici siano simili. (3 punti)

* * *

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : x - 3y + z = -9.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta s. (3 punti)

(c) Determinare, la distanza tra t e r. Si dica come trovare una retta, h, incidente sia t che r, che formi angoli uguali con entrambe. Una tale retta è unica? (4 punti)

* * *

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

10 settembre 2013

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di base di un K-spazio vettoriale V;
   b) definizione di distanza tra sottovarietà lineari dello spazio euclideo.
2. Sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$. È vero che i vettori $v_1 - 2v_2 + 3v_3 - \dots + (-1)^{n-1} n v_n, v_2, \dots, v_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$?
3. Sia A una matrice diagonalizzabile in $M_n(\mathbb{R})$. È vero che $A^2 + \mathbf{1}_n$ è una matrice diagonalizzabile? (giustificare la risposta)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $3z = z^4$ e disegnarli nel piano di Argand Gauss. (3 punti)

* * *

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[X]_{\le 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[X]_{\le 3}$

$$U = \{\, P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P(-2) = P(2) = 0 \,\}$$
$$V = \{\, P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid P'(0) = 0 \,\} \quad (P'(X) \text{ è la derivata di } P(X))$$
$$W = \langle\, X^3 + 2X^2 + 1,\ X^3 + 2X^2 - 1,\ 4X^3 + X^2 + 2,\ 4X^3 + X^2 - 2 \,\rangle.$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ a base di $U + V$. (1 punti)

(c) Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}[X]_{\le 3}$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}[X]_{\le 3}$ e la proiezione del vettore $X^3 + X^2 + X + 1$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $X^3 - 4X$. Tale T è univocamente determinato? (3 punti)

* * *

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_t di $\mathbb{R}^3$ di matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} t & 2t-1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

in base canonica.

(voltare pagina)

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui f_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (5 punti)

2. Determinare i valori di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori per f_t e si scriva una tale base. (2 punti)

3. Si considerino le matrici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Si determini, se esiste, una coppia di numeri reali (a, b) per cui le due matrici siano simili. (3 punti)

* * *

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} x - z = -1 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : 3x - y - z = 9.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t ortogonale a r passante per l'origine e che intersechi la retta s. (3 punti)

(c) Determinare, la distanza tra t e r. Si dica come trovare una retta, h, incidente sia t che r, che formi angoli uguali con entrambe. Una tale retta è unica? (4 punti)

* * *