Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1, 2, 5
Docente: Maurizio Candilera

3 febbraio 2014

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di base di un K-spazio vettoriale V;
   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_m\}$ di W.

2. Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e si consideri il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. È vero che esiste un vettore $w_0 \in W$ tale $v - w_0$ sia perpendicolare a tutti i vettori di W? Un tale w_0 è unico?

3. Sapendo che $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, $\dim U = k$ e $w_1, w_2 \notin U$; cosa posso dire di $\dim(U + \langle w_1, w_2 \rangle)$?

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $z^4 = \frac{1+i}{1-i}$, disegnarli nel piano di Argand Gauss e scriverli in forma algebrica. (4 punti)

Esercizio 2. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 e si considerino i seguenti sottospazi vettoriali,

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è autovettore per } A \right\}$$
$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}_{U\cap V}$ di $U \cap V$, una base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ di $V \cap W$ una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U \cap W$. Vi sono tra questi tre sottospazi vettoriali due sottospazi che sono in somma diretta? (4 punti)

(b) Completare la base $\mathcal{B}_{V\cap W}$ a base di $V + W$. (2 punti)

(c) Determinare (se esiste) un sottospazio T di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $T \oplus U = M_2(\mathbb{R})$ e la proiezione del vettore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U lungo la direzione T sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Tale T è univocamente determinato? (4 punti)

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $g_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 2+\alpha & 2+2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

in base canonica.

1. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui g_α è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (5 punti)

2. Determinare i valori di α per cui esiste una base ortonormale di autovettori per g_α e si scriva in tali casi una base ortogonale che diagonalizza g_α. (3 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : x + y - z = 2.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (4 punti)

(b) Dire se esistono due rette t_1 e t_2, contenute nel piano π, parallele a s e tali che $dist(r, t_1) = dist(r, t_2) = dist(t_1, t_2)$. In caso affermativo, si determini la distanza tra le due rette e le equazioni cartesiane e parametriche delle due rette. In caso negativo, si spieghi perché due tali rette non possono esistere. (4 punti)