A

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola __________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

16 giugno 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte.

1. Sia $A \in M_{3\times 6}(\mathbb{R})$. Quante righe e quante colonne ha la matrice $B = {}^tAA$? È vero che B è ortogonalmente diagonalizzabile ed ha autovalore 0 con molteplicità geometrica maggiore o uguale a 3?

2. Siano π_1 e π_2 due piani paralleli e distinti nello spazio euclideo e siano dati $P_1, Q_1 \in \pi_1$ e $P_2, Q_2 \in \pi_2$. Sapendo che il vettore $P_2 - P_1$ è ortogonale ai due piani, si deduca che $\|P_2 - P_1\| \le \|Q_2 - Q_1\|$.

3. Due matrici A_1 e A_2 in $M_n(\mathbb{R})$ si dicono *simultaneamente diagonalizzabili* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}A_1P = D_1$ e $P^{-1}A_2P = D_2$, con D_1 e D_2 matrici diagonali. È vero che in tal caso $A_1A_2 = A_2A_1$?

4. Scrivere il sistema lineare richiesto o spiegare perché non può esistere, nei seguenti casi:

   (a) Un sistema lineare di rango 1 con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   (b) Un sistema lineare omogeneo con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   (c) Un sistema lineare di due equazioni, con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \bar{z}^2$$

e disegnarli nel piano di Argand Gauss. Trovare, se esiste, un polinomio $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ o in $\mathbb{C}[X]$ che abbia esattamente questi numeri come radici. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\le 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2.

1. Si verifichi che i vettori, $p_1 = 2 + X + 3X^2$, $p_2 = X + 2X^2$, $p_3 = 1 + X^2$, formano una base, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$, di V. (1 punto)

2. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare, tale che: $f(p_1) = 2 + 2X^2$, $f(p_2) = 2X + 4X^2$, $f(p_3) = -1 - X^2$. Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f)$ e $P = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$, ove $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ indica la base canonica di V. (2 punti)

3. Si determini $f^{-1}\{1 - X - X^2\}$. (2 punti)

4. Si determinino, autovalori, autovettori e polinomio caratteristico per f e si dica se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. (2 punti)

5. Al variare di t in $\mathbb{R}$, si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $A - tP$. (2 punti)

6. Esiste qualche valore di $k \in \mathbb{R}$ e una base $\mathcal{U}$ di V tale che la matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$ coincida con (1 punto)

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k+1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k+1 & 0 & 2k+2 \end{pmatrix}?$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Sia $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ con la base, $\mathcal{B}$, costituita dalle matrici

$$B_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad B_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad B_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad B_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi $S = \{ A \in M \mid {}^tA = A \}$ e $S \cap \langle B_1, B_3, B_4 \rangle$ di M. (2 punti)

(b) È vero che $S + \langle B_1 \rangle = S + \langle B_2 \rangle = S + \langle B_3 \rangle = S + \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$? (1 punto)

(c) Si determini un sottospazio T di M tale che $S \oplus T = M = \langle B_1, B_3, B_4 \rangle \oplus T$ e sia $\pi : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T. Si determinino nucleo e immagine della restrizione di π a $\langle B_1, B_3, B_4 \rangle$ e si dica come dipendono dalla scelta di T. (2 punti)

(d) Detto D il sottospazio di M formato dalle matrici diagonali, si determini, se esiste, un sottospazio U di M tale che $\dim S \cap U = 1 = \dim U \cap \langle B_1, B_3, B_4 \rangle$, $U \oplus D = M$ e $\pi(u) \in U$, per ogni $u \in U$. (2 punti)

Esercizio 4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle rette, la loro distanza e i punti di minima distanza. (3 punti)

(b) Detti $R \in r$ e $S \in s$ una coppia di punti di minima distanza tra le due rette, si determinino tutti i quadrati aventi un lato coincidente col segmento RS e un lato sulla retta s. (2 punti)

(c) Determinare le equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta s e a distanza 1 dal lato opposto dei quadrati descritti nel punto precedente. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

16 giugno 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte.

1. Siano π_1 e π_2 due piani paralleli e distinti nello spazio euclideo e siano dati $P_1, Q_1 \in \pi_1$ e $P_2, Q_2 \in \pi_2$. Sapendo che il vettore $Q_2 - Q_1$ è ortogonale ai due piani, si deduca che $\|P_2 - P_1\| \geq \|Q_2 - Q_1\|$.
2. Due endomorfismi $\phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dicono *simultaneamente diagonalizzabili* se esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, costituita da autovettori per entrambo gli endomorfismi. È vero che in tal caso $\phi_1(\phi_2(v)) = \phi_2(\phi_1(v))$ per ogni v in $\mathbb{R}^n$?
3. Sia $A \in M_{4\times 7}(\mathbb{R})$. Quante righe e quante colonne ha la matrice $B = {}^tAA$? È vero che B è diagonalizzabile e tutti gli autovalori sono numeri reali positivi?
4. Scrivere il sistema lineare richiesto o spiegare perché non può esistere, nei seguenti casi:
   (a) Un sistema lineare omogeneo con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
   (b) Un sistema lineare di rango 1 con soluzioni $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
   (c) Un sistema lineare di due equazioni, con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 + \bar{z}^2 = 0$$

e disegnarli nel piano di Argand Gauss. Trovare, se esiste, un polinomio $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ o in $\mathbb{C}[X]$ che abbia esattamente questi numeri come radici. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2.

1. Si verifichi che i vettori, $p_1 = 3 + X + 2X^2$, $p_2 = 2 + X$, $p_3 = 1 + X^2$, formano una base, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$, di V. (1 punto)
2. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare, tale che: $f(p_1) = 2+2X^2$, $f(p_2) = 4+2X$, $f(p_3) = -1-X^2$. Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f)$ e $P = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$, ove $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ indica la base canonica di V. (2 punti)
3. Si determini $f^{-1}\{-1 - X + X^2\}$. (2 punti)
4. Si determinino, autovalori, autovettori e polinomio caratteristico per f e si dica se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. (2 punti)
5. Al variare di t in $\mathbb{R}$, si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $A - tP$. (2 punti)
6. Esiste qualche valore di $k \in \mathbb{R}$ e una base $\mathcal{U}$ di V tale che la matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$ coincida con (1 punto)

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+1 \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2k+2 \end{pmatrix}?$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Sia $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ con la base, $\mathcal{B}$, costituita dalle matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi $S = \{ A \in M \mid {}^tA = A \}$ e $S \cap \langle B_1, B_2, B_4 \rangle$ di M. (2 punti)

(b) È vero che $S + \langle B_1 \rangle = S + \langle B_2 \rangle = S + \langle B_3 \rangle = S + \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$? (1 punto)

(c) Si determini un sottospazio T di M tale che $S \oplus T = M = \langle B_1, B_2, B_4 \rangle \oplus T$ e sia $\pi : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T. Si determinino nucleo e immagine della restrizione di π a $\langle B_1, B_2, B_4 \rangle$ e si dica come dipendono dalla scelta di T. (2 punti)

(d) Detto D il sottospazio di M formato dalle matrici diagonali, si determini, se esiste, un sottospazio U di M tale che $\dim S \cap U = 1 = \dim U \cap \langle B_1, B_2, B_4 \rangle$, $U \oplus D = M$ e $\pi(u) \in U$, per ogni $u \in U$. (2 punti)

Esercizio 4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle rette, la loro distanza e i punti di minima distanza. (3 punti)

(b) Detti $R \in r$ e $S \in s$ una coppia di punti di minima distanza tra le due rette, si determinino tutti i quadrati aventi un lato coincidente col segmento RS e un lato sulla retta s. (2 punti)

(c) Determinare le equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta s e a distanza 1 dal lato opposto dei quadrati descritti nel punto precedente. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

16 giugno 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte.

1. Sia $A \in M_{4\times 6}(\mathbb{R})$. Quante righe e quante colonne ha la matrice $B = {}^tAA$? È vero che B è ortogonalmente diagonalizzabile ed ha autovalore 0 con molteplicità geometrica maggiore o uguale a 2?

2. Due matrici A_1 e A_2 in $M_n(\mathbb{R})$ si dicono *simultaneamente diagonalizzabili* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $PA_1P^{-1} = D_1$ e $PA_2P^{-1} = D_2$, con D_1 e D_2 matrici diagonali. È vero che in tal caso $A_1A_2 = A_2A_1$?

3. Siano π_1 e π_2 due piani paralleli e distinti nello spazio euclideo e siano dati $P_1, Q_1 \in \pi_1$ e $P_2, Q_2 \in \pi_2$. Sapendo che il vettore $Q_2 - Q_1$ è ortogonale ai due piani, si deduca che $\|P_2 - P_1\|^2 \geq \|Q_2 - Q_1\|^2$.

4. Scrivere il sistema lineare richiesto o spiegare perché non può esistere, nei seguenti casi:

   (a) Un sistema lineare di rango 1 con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   (b) Un sistema lineare omogeneo con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   (c) Un sistema lineare di due equazioni, con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = -\bar{z}^2$$

e disegnarli nel piano di Argand Gauss. Trovare, se esiste, un polinomio $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ o in $\mathbb{C}[X]$ che abbia esattamente questi numeri come radici. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2.

1. Si verifichi che i vettori, $p_1 = -2 + 3X + X^2$, $p_2 = 2X + X^2$, $p_3 = -1 + X$, formano una base, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$, di V. (1 punto)

2. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare, tale che: $f(p_1) = -2+2X$, $f(p_2) = 4X+2X^2$, $f(p_3) = 1-X$. Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f)$ e $P = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$, ove $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ indica la base canonica di V. (2 punti)

3. Si determini $f^{-1}\{-1 - X - X^2\}$. (2 punti)

4. Si determinino, autovalori, autovettori e polinomio caratteristico per f e si dica se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. (2 punti)

5. Al variare di t in $\mathbb{R}$, si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $A - tP$. (2 punti)

6. Esiste qualche valore di $k \in \mathbb{R}$ e una base $\mathcal{U}$ di V tale che la matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$ coincida con (1 punto)

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k+2 & 0 & k+1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k+1 & 2 \end{pmatrix}?$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Sia $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ con la base, $\mathcal{B}$, costituita dalle matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi $S = \{ A \in M \mid {}^tA = A \}$ e $S \cap \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ di M. (2 punti)

(b) È vero che $S + \langle B_1 \rangle = S + \langle B_3 \rangle = S + \langle B_4 \rangle = S + \langle B_1, B_3, B_4 \rangle$? (1 punto)

(c) Si determini un sottospazio T di M tale che $S \oplus T = M = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle \oplus T$ e sia $\pi : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T. Si determinino nucleo e immagine della restrizione di π a $\langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ e si dica come dipendono dalla scelta di T. (2 punti)

(d) Detto D il sottospazio di M formato dalle matrici diagonali, si determini, se esiste, un sottospazio U di M tale che $\dim S \cap U = 1 = \dim U \cap \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$, $U \oplus D = M$ e $\pi(u) \in U$, per ogni $u \in U$. (2 punti)

Esercizio 4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle rette, la loro distanza e i punti di minima distanza. (3 punti)

(b) Detti $R \in r$ e $S \in s$ una coppia di punti di minima distanza tra le due rette, si determinino tutti i quadrati aventi un lato coincidente col segmento RS e un lato sulla retta s. (2 punti)

(c) Determinare le equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta s e a distanza 1 dal lato opposto dei quadrati descritti nel punto precedente. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

16 giugno 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte.

1. Due endomorfismi $\phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dicono *simultaneamente diagonalizzabili* se esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, costituita da autovettori per entrambo gli endomorfismi. È vero che in tal caso $\phi_1(\phi_2(v)) - \phi_2(\phi_1(v)) = 0$ per ogni v in $\mathbb{R}^n$?
2. Siano π_1 e π_2 due piani paralleli e distinti nello spazio euclideo e siano dati $P_1, Q_1 \in \pi_1$ e $P_2, Q_2 \in \pi_2$. Sapendo che il vettore $Q_2 - Q_1$ è ortogonale ai due piani, si deduca che $\|P_2 - P_1\|^2 \geq \|Q_2 - Q_1\|^2$.
3. Sia $A \in M_{5\times 3}(\mathbb{R})$, di rango 3. Quante righe e quante colonne ha la matrice $B = {}^tAA$? È vero che B è diagonalizzabile e con autovalori positivi?
4. Scrivere il sistema lineare richiesto o spiegare perché non può esistere, nei seguenti casi:
   (a) Un sistema lineare di due equazioni, con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
   (b) Un sistema lineare di rango 1 con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$.
   (c) Un sistema lineare omogeneo con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 - \bar{z}^2 = 0$$

e disegnarli nel piano di Argand Gauss. Trovare, se esiste, un polinomio $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ o in $\mathbb{C}[X]$ che abbia esattamente questi numeri come radici. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2.

1. Si verifichi che i vettori, $p_1 = 3 + 2X + X^2$, $p_2 = 2 + X^2$, $p_3 = X + X^2$, formano una base, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$, di V. (1 punto)
2. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare, tale che: $f(p_1) = 2X + 2X^2$, $f(p_2) = 4 + 2X^2$, $f(p_3) = -X - X^2$. Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f)$ e $P = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$, ove $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ indica la base canonica di V. (2 punti)
3. Si determini $f^{-1}\{-1 + X - X^2\}$. (2 punti)
4. Si determinino, autovalori, autovettori e polinomio caratteristico per f e si dica se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. (2 punti)
5. Al variare di t in $\mathbb{R}$, si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $A - tP$. (2 punti)
6. Esiste qualche valore di $k \in \mathbb{R}$ e una base $\mathcal{U}$ di V tale che la matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$ coincida con (1 punto)

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k & k+1 \\ k+1 & 0 & 2 \end{pmatrix}?$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Sia $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ con la base, $\mathcal{B}$, costituita dalle matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi $S = \{ A \in M \mid {}^tA = A \}$ e $S \cap \langle B_2, B_3, B_4 \rangle$ di M. (2 punti)

(b) È vero che $S + \langle B_1 \rangle = S + \langle B_2 \rangle = S + \langle B_3 \rangle = S + \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$? (1 punto)

(c) Si determini un sottospazio T di M tale che $S \oplus T = M = \langle B_2, B_3, B_4 \rangle \oplus T$ e sia $\pi : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T. Si determinino nucleo e immagine della restrizione di π a $\langle B_2, B_3, B_4 \rangle$ e si dica come dipendono dalla scelta di T. (2 punti)

(d) Detto D il sottospazio di M formato dalle matrici diagonali, si determini, se esiste, un sottospazio U di M tale che $\dim S \cap U = 1 = \dim U \cap \langle B_2, B_3, B_4 \rangle$, $U \oplus D = M$ e $\pi(u) \in U$, per ogni $u \in U$. (2 punti)

Esercizio 4. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle rette, la loro distanza e i punti di minima distanza. (3 punti)

(b) Detti $R \in r$ e $S \in s$ una coppia di punti di minima distanza tra le due rette, si determinino tutti i quadrati aventi un lato coincidente col segmento RS e un lato sulla retta s. (2 punti)

(c) Determinare le equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta s e a distanza 1 dal lato opposto dei quadrati descritti nel punto precedente. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.