A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola __________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

16 giugno 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte.

1. Sia $A \in M_{3\times 6}(\mathbb{R})$. Quante righe e quante colonne ha la matrice $B = {}^tAA$? È vero che B è ortogonalmente diagonalizzabile ed ha autovalore 0 con molteplicità geometrica maggiore o uguale a 3?

2. Siano π_1 e π_2 due piani paralleli e distinti nello spazio euclideo e siano dati $P_1, Q_1 \in \pi_1$ e $P_2, Q_2 \in \pi_2$. Sapendo che il vettore $P_2 - P_1$ è ortogonale ai due piani, si deduca che $\|P_2 - P_1\| \leq \|Q_2 - Q_1\|$.

3. Due matrici A_1 e A_2 in $M_n(\mathbb{R})$ si dicono *simultaneamente diagonalizzabili* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}A_1P = D_1$ e $P^{-1}A_2P = D_2$, con D_1 e D_2 matrici diagonali. È vero che in tal caso $A_1A_2 = A_2A_1$?

4. Scrivere il sistema lineare richiesto o spiegare perché non può esistere, nei seguenti casi:

   (a) Un sistema lineare di rango 1 con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   (b) Un sistema lineare omogeneo con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   (c) Un sistema lineare di due equazioni, con soluzioni $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Risposte

1. La matrice $B = {}^tAA$ ha 6 righe e 6 colonne ed è simmetrica. Quindi è ortogonalmente diagonalizzabile. La matrice A ha un nucleo di dimensione maggiore o uguale a 3 e, se $v \in \operatorname{Ker} A$, si ha $Bv = {}^tAAv = {}^tA0 = 0$. Quindi l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica almeno 3 per la matrice B.

2. Sia U il sottospazio direttore comune ai due piani. Allora $Q_2-Q_1 = (Q_2-P_2)+(P_2-P_1)+(P_1-Q_1)$, con $Q_2 - P_2 = u_2 \in U$, $P_2 - P_1 = n \in U^\perp$ e $P_1 - Q_1 = u_1 \in U$. Allora, ricordando le relazioni di ortogonalità, si ha
$$\|Q_2-Q_1\|^2 = (u_2+u_1+n)\cdot(u_2+u_1+n) = (u_2+u_1)\cdot(u_2+u_1)+n\cdot n = (u_2+u_1)\cdot(u_2+u_1)+\|P_2-P_1\|^2 \geq \|P_2-P_1\|^2.$$

3. Si ha $A_1 = PD_1P^{-1}$ e $A_2 = PD_2P^{-1}$, e le matrici diagonali commutano tra loro. Quindi
$$A_1A_2 = PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1} = PD_2D_1P^{-1} = PD_2P^{-1}PD_1P^{-1} = A_2A_1.$$

4. Discutiamo i vari casi:

   (a) È sufficiente l'unica equazione $X - Y - Z = 3$.

   (b) La soluzione particolare appartiene al sottospazio vettoriale, essendo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi è sufficiente l'equazione omogenea $2X - 3Y + Z = 0$.

   (c) Il sistema deve avere rango 1, quindi le due equazioni devono essere proporzionali e possiamo prendere, ad esempio $\begin{cases} X = 1 \\ 2X = 2 \end{cases}$.

ESERCIZI

Esercizio 1. *Trovare tutti numeri complessi che soddisfano l'equazione:*

$$z^2 = \bar{z}^2$$

e disegnarli nel piano di Argand Gauss. Trovare, se esiste, un polinomio $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ o in $\mathbb{C}[X]$ che abbia esattamente questi numeri come radici. (3 punti)

Svolg. Il numero complesso $z = 0$ è una soluzione dell'equazione. Per cercare le soluzioni non nulle, passiamo alla forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$. In questa forma l'equazione diventa $\rho e^{2i\vartheta} = \rho e^{-2i\vartheta}$ che è equivalente a $2\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi$ per qualche intero k; ovvero $\vartheta = k\frac{\pi}{2}$, per $k = 0, 1, 2, 3$. Le soluzioni sono quindi tutti i numeri complessi reali o puramente immaginari (i due assi del piano di Gauss). Non può esistere un polinomio non nullo che abbia un numero infinito di radici.

Esercizio 2. *Sia $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2.*

1. *Si verifichi che i vettori, $p_1 = 2 + X + 3X^2$, $p_2 = X + 2X^2$, $p_3 = 1 + X^2$, formano una base, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$, di V.* (1 punto)
2. *Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare, tale che: $f(p_1) = 2 + 2X^2$, $f(p_2) = 2X + 4X^2$, $f(p_3) = -1 - X^2$. Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f)$ e $P = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$, ove $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ indica la base canonica di V.* (2 punti)
3. *Si determini $f^{-1}\{1 - X - X^2\}$.* (2 punti)
4. *Si determinino, autovalori, autovettori e polinomio caratteristico per f e si dica se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.* (2 punti)
5. *Al variare di t in $\mathbb{R}$, si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $A - tP$.* (2 punti)
6. *Esiste qualche valore di $k \in \mathbb{R}$ e una base $\mathcal{U}$ di V tale che la matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$ coincida con* (1 punto)

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k+1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k+1 & 0 & 2k+2 \end{pmatrix}?$$

Svolg.

1. I tre vettori sono linearmente indipendenti, perché la matrice che ha come colonne le loro coordinate nella base canonica, $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$, ha rango 3.
2. Si ha $A = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $P = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Si determini $f^{-1}\{1-X-X^2\}$. In base alle definizioni, $f(-\frac{1}{2}p_2 - p_3) = -\frac{1}{2}f(p_2) - f(p_3) = 1 - X - X^2$ e $f(p_1) = -2f(p_3)$, ovvero $f(p_1 + 2p_3) = 0$. Dunque, $f^{-1}\{1 - X - X^2\} = (-1 - \frac{1}{2}X - 2X^2) + \langle 4 + X + 2X^2 \rangle$.
4. Si ha $f(p_2) = 2p_2$, $f(p_3) = -p_3$ e $f(p_1 + 2p_3) = 0$. Quindi ci sono tre autovalori distinti per f che è perciò diagonalizzabile, con polinomio caratteristico uguale a $p_f(X) = X(X - 2)(X + 1)$.
5. Si ha $A = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f)$ e $P = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$; quindi $A - tP = \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{C}}(f - t\,\mathrm{id}_V)$ e il sistema ha soluzione non banale solo quando t è un autovalore per f e, in tal caso, le soluzioni sono le coordinate degli autovettori nella base $\mathcal{P}$.
6. La matrice A_k ha polinomio caratteristico $p_k(X) = (X - 2)(X - k)(X - 2k - 2)$, e quindi è simile alla matrice di f se, e solo se, $k = -1$.

Esercizio 3. *Sia $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ con la base, $\mathcal{B}$, costituita dalle matrici*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi $S = \{ A \in M \mid {}^tA = A \}$ e $S \cap \langle B_1, B_3, B_4 \rangle$ di M.* (2 punti)

(b) *È vero che $S + \langle B_1 \rangle = S + \langle B_2 \rangle = S + \langle B_3 \rangle = S + \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$?* (1 punto)

(c) *Si determini un sottospazio T di M tale che $S \oplus T = M = \langle B_1, B_3, B_4 \rangle \oplus T$ e sia $\pi : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T. Si determinino nucleo e immagine della restrizione di π a $\langle B_1, B_3, B_4 \rangle$ e si dica come dipendono dalla scelta di T.* (2 punti)

(d) *Detto D il sottospazio di M formato dalle matrici diagonali, si determini, se esiste, un sottospazio U di M tale che $\dim S \cap U = 1 = \dim U \cap \langle B_1, B_3, B_4 \rangle$, $U \oplus D = M$ e $\pi(u) \in U$, per ogni $u \in U$.* (2 punti)

Svolg.

(a) S ha dimensione 3 e una base è, ad esempio, $\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Gli elementi di S sono le matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ per cui $b = c$; dunque $S \cap \langle B_1, B_3, B_4 \rangle = \langle B_1 - B_3, B_4 \rangle$ e ha dimensione 2.

(b) Il sottospazio S ha dimensione $3 = \dim M - 1$, quindi sommando a S un qualsiasi sottospazio che non sia contenuto in esso si ottiene tutto lo spazio M. Dunque $S + \langle B_1 \rangle = S + \langle B_2 \rangle = S + \langle B_3 \rangle = S + \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$.

(c) Basta prendere $T = \langle B_2 \rangle$. Il nucleo della restrizione di π a $\langle B_1, B_3, B_4 \rangle$ è uguale a $\langle B_1, B_3, B_4 \rangle \cap \operatorname{Ker} \pi = \langle B_1, B_3, B_4 \rangle \cap T = \langle 0 \rangle$. Perciò l'immagine della restrizione ha dimensione 3 (formula delle dimensioni) ed è contenuta in $\operatorname{Im} \pi = S$ che ha la stessa dimensione. Dunque, la restrizione di π è un isomorfismo tra $\langle B_1, B_3, B_4 \rangle$ e S, indipendentemente dalla scelta del complementare comune, T.

(d) Basta prendere $U = \langle B_1 - B_3 \rangle \oplus T$. Infatti, $S \cap U = \langle B_1 - B_3 \rangle = \langle B_1, B_3, B_4 \rangle \cap U$ e $U \oplus D = S \oplus T = M$. Inoltre, se $u \in U$, $\pi(u) \in \langle B_1 - B_3 \rangle \subset U$, perché $T = \operatorname{Ker} \pi$.

Esercizio 4. *Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le rette di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

(a) *Determinare la posizione reciproca delle rette, la loro distanza e i punti di minima distanza.* (3 punti)

(b) *Detti $R \in r$ e $S \in s$ una coppia di punti di minima distanza tra le due rette, si determinino tutti i quadrati aventi un lato coincidente col segmento RS e un lato sulla retta s.* (2 punti)

(c) *Determinare le equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta s e a distanza 1 dal lato opposto dei quadrati descritti nel punto precedente.* (2 punti)

Svolg.

(a) Le due rette sono sghembe. La reciproca distanza è $\sqrt{2}$ e la coppia di punti a minima distanza è formata dai punti $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$ e $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in s$.

(b) Un lato è il segmento RS, quindi i possibili estremi del lato successivo sono i due punti della retta s a distanza $\sqrt{2}$ da S; ovvero $S_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il vertice rimanente, nei due casi, sarà $T_1 = S_1 + (R - S) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oppure $T_2 = S_2 + (R - S) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) I piani contenenti la retta s formano il fascio di equazione $\pi_{(a,b)} : a(x+y+z-5)+b(x+y-2z+1) = 0$, al variare dei parametri omogenei (a, b). Il lato opposto del quadrato è parallelo a s e contiene il punto R; quindi è sufficiente imporre la condizione che la distanza del punto R dal piano $\pi_{(a,b)}$ sia uguale a 1 per trovare i piani cercati. Si ha quindi

$$d(\pi_{(a,b)}, R) = \frac{|-2a - 2b|}{\sqrt{2(a+b)^2 + (a-2b)^2}} = 1;$$

che determina i due piani $\pi_{(a,b)}$ per $\langle (a, b) \rangle = \left\langle (3\sqrt{2} - 4, 1) \right\rangle$ e $\langle (a, b) \rangle = \left\langle (3\sqrt{2} + 4, -1) \right\rangle$.