A

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

3 luglio 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Dare la definizione di "insieme di generatori di uno spazio vettoriale V".

   Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V, allora è vero che l'insieme $\{v_1,\ \dots,\ v_m,\ v_1 + \cdots + v_m\}$ è un insieme di generatori di V? Motivare la risposta.

2. Dare la definizione di "nucleo di un'applicazione lineare $f \colon V \to W$".

   Siano $f, g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$. È vero che se $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, allora $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$? Motivare la risposta.

3. Dare la definizione di "autovalore di una matrice A".

   È vero che se una matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ ha 2 autovalori reali distinti, ciascuno con molteplicità geometrica 2, allora A è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

ESERCIZI

Esercizio 1. Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$z = \frac{2^{45}\, i^{63}}{(1+i)^{89}}.$$

Determinare un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, di grado 3, che ammetta il numero z e il suo coniugato tra le proprie radici. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $M = M_2(\mathbb{R})$ con la base canonica $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$, si consideri il sottospazio

$$U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U. (1 punto)
2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U. (1 punto)
3. Determinare, se possibile, due sottospazi distinti W_1 e W_2 di M tali che $U \oplus W_1 = M = U \oplus W_2$. (1 punto)
4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 tali che (2 punti)

$$\dim W_1 = \dim W_2 = 2, \qquad W_1 \cap U = W_2 \cap U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \quad \text{e} \quad W_1 + W_2 + U = M.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3.
Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}[X]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(X^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, 2+X, 1-X^2\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del codominio. (1 punto)
2. Stabilire se l'applicazione f è iniettiva. (1 punto)
3. Determinare la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 punti)
4. Determinare tutte le applicazioni lineari $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ k-1 & 2-2k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

1. Determinare per quali valori del parametro k il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità geometrica di ogni autovalore di A_k. (2 punti)
2. Determinare per quali valori del parametro k la matrice A_k è simile alla matrice $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico usuale si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 3y + 2z = 6 \end{cases} .$$

1. Determinare la distanza di P da r. (1 punto)
2. Determinare l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e P. (1 punto)
3. Determinare l'equazione cartesiana del piano σ, ortogonale a r e passante per P. (2 punti)
4. Determinare l'equazione cartesiana di una retta t, ortogonale e incidente a r, passante per P. (2 punti)
5. Determinare una retta h, sghemba con r e passante per P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

3 luglio 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Dare la definizione di "base di uno spazio vettoriale V".

   Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, allora è vero che l'insieme $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 + \cdots + v_n\}$ è una base di V? Motivare la risposta.

2. Dare la definizione di "immagine di un'applicazione lineare $f\colon V \to W$".

   Siano $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$. È vero che se $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, allora $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$? Motivare la risposta.

3. Dare la definizione di "autovettore di una matrice A".

   È vero che se una matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ ha 2 autovalori reali distinti, ciascuno con molteplicità algebrica 2, allora A è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

ESERCIZI

Esercizio 1. Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$z = \frac{2^{46}\, i^{53}}{(-1+i)^{91}}.$$

Determinare un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, di grado 3, che ammetta il numero z e il suo coniugato tra le proprie radici. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $M = M_2(\mathbb{R})$ con la base canonica $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$, si consideri il sottospazio

$$U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}-1&2\\4&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\3&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2&2\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U. (1 punto)
2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U. (1 punto)
3. Determinare, se possibile, due sottospazi distinti W_1 e W_2 di M tali che $U \oplus W_1 = M = U \oplus W_2$. (1 punto)
4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 tali che (2 punti)

$$\dim W_1 = \dim W_2 = 2, \qquad W_1 \cap U = W_2 \cap U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}-1&2\\4&1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle \quad \text{e} \quad W_1 + W_2 + U = M.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3.
Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}[X]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(X^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, 2-X, 1+X^2\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del codominio. (1 punto)
2. Stabilire se l'applicazione f è iniettiva. (1 punto)
3. Determinare la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 punti)
4. Determinare tutte le applicazioni lineari $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ k-1 & 1 & 2-2k & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

1. Determinare per quali valori del parametro k il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità geometrica di ogni autovalore di A_k. (2 punti)
2. Determinare per quali valori del parametro k la matrice A_k è simile alla matrice $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico usuale si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 3y - 3z = 6 \end{cases}$$

1. Determinare la distanza di P da r. (1 punto)
2. Determinare l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e P. (1 punto)
3. Determinare l'equazione cartesiana del piano σ, ortogonale a r e passante per P. (2 punti)
4. Determinare l'equazione cartesiana di una retta t, ortogonale e incidente a r, passante per P. (2 punti)
5. Determinare una retta h, sghemba con r e passante per P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

3 luglio 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Dare la definizione di “vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V”.

   Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V, allora è vero che l'insieme $\{v_1,\ \dots,\ v_{k-1},\ v_1 + \cdots + v_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V? Motivare la risposta.

2. Dare la definizione di “nucleo di un'applicazione lineare $f\colon V \to W$”.

   Siano $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$. È vero che se $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, allora $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$? Motivare la risposta.

3. Dare la definizione di “autovalore di una matrice A”.

   È vero che se una matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ ha 2 autovalori reali distinti, uno con molteplicità algebrica 1 e l'altro con molteplicità geometrica 3, allora A è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

ESERCIZI

Esercizio 1. Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$z = \frac{2^{44}\, i^{59}}{(1-i)^{91}}.$$

Determinare un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, di grado 3, che ammetta il numero z e il suo coniugato tra le proprie radici. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $M = M_2(\mathbb{R})$ con la base canonica $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$, si consideri il sottospazio

$$U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1&-1\\2&4\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&3\\-2&2\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U. (1 punto)
2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U. (1 punto)
3. Determinare, se possibile, due sottospazi distinti W_1 e W_2 di M tali che $U \oplus W_1 = M = U \oplus W_2$. (1 punto)
4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 tali che (2 punti)

$$\dim W_1 = \dim W_2 = 2, \qquad W_1 \cap U = W_2 \cap U = \langle \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&3\end{smallmatrix}\right) \rangle \quad \text{e} \quad W_1 + W_2 + U = M.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3.
Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}[X]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f(X^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, -1 - X + X^2, X^2\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del codominio. (1 punto)
2. Stabilire se l'applicazione f è iniettiva. (1 punto)
3. Determinare la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 punti)
4. Determinare tutte le applicazioni lineari $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 2 & 2-2k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

1. Determinare per quali valori del parametro k il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità geometrica di ogni autovalore di A_k. (2 punti)
2. Determinare per quali valori del parametro k la matrice A_k è simile alla matrice $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico usuale si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la retta

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 3x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

1. Determinare la distanza di P da r. (1 punto)
2. Determinare l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e P. (1 punto)
3. Determinare l'equazione cartesiana del piano σ, ortogonale a r e passante per P. (2 punti)
4. Determinare l'equazione cartesiana di una retta t, ortogonale e incidente a r, passante per P. (2 punti)
5. Determinare una retta h, sghemba con r e passante per P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

3 luglio 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Dare la definizione di "vettori linearmente dipendenti in uno spazio vettoriale V".
   Se $\{v_1, \dots, v_r\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V, allora è vero che l'insieme $\{v_1,\ \dots,\ v_r,\ v_1 + \cdots + v_r\}$ è un insieme di di vettori linearmente dipendenti di V? Motivare la risposta.
2. Dare la definizione di "immagine di un'applicazione lineare $f\colon V \to W$".
   Siano $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$. È vero che se $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, allora $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$? Motivare la risposta.
3. Dare la definizione di "autovettore di una matrice A".
   È vero che se una matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ ha 4 autovalori reali distinti, allora A è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

ESERCIZI

Esercizio 1. Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$z = \frac{2^{43}\, i^{61}}{(i-1)^{87}}.$$

Determinare un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, di grado 3, che ammetta il numero z e il suo coniugato tra le proprie radici. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $M = M_2(\mathbb{R})$ con la base canonica $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$, si consideri il sottospazio

$$U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}2&4\\1&-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&3\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2&2\\1&3\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U. (1 punto)
2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U. (1 punto)
3. Determinare, se possibile, due sottospazi distinti W_1 e W_2 di M tali che $U \oplus W_1 = M = U \oplus W_2$. (1 punto)
4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 tali che (2 punti)

$$\dim W_1 = \dim W_2 = 2, \qquad W_1 \cap U = W_2 \cap U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&-2\end{smallmatrix}\right) \right\rangle \quad \text{e} \quad W_1 + W_2 + U = M.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3.
Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}[X]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(X^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, 1 + X - X^2, -X^2\}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del codominio. (1 punto)
2. Stabilire se l'applicazione f è iniettiva. (1 punto)
3. Determinare la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 punti)
4. Determinare tutte le applicazioni lineari $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2-2k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

1. Determinare per quali valori del parametro k il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità geometrica di ogni autovalore di A_k. (2 punti)
2. Determinare per quali valori del parametro k la matrice A_k è simile alla matrice $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico usuale si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la retta

$$r : \begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ 3x - 3y - 2z = -6 \end{cases}$$

1. Determinare la distanza di P da r. (1 punto)
2. Determinare l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e P. (1 punto)
3. Determinare l'equazione cartesiana del piano σ, ortogonale a r e passante per P. (2 punti)
4. Determinare l'equazione cartesiana di una retta t, ortogonale e incidente a r, passante per P. (2 punti)
5. Determinare una retta h, sghemba con r e passante per P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti .
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.