A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

4 settembre 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Siano m e n due interi positivi, con $m < n$. Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$, a due a due ortogonali, è vero che i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti?
   È vero che se i vettori $\{v_1, \dots, v_m,\}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$, esistono dei vettori $v_{m+1}, \dots, v_n$, a due a due ortogonali, tali che $\mathbb{R}^n = \langle v_1, \dots, v_m \rangle \oplus \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$?
   Motivare le risposte.

2. Scrivere l'enunciato del teorema di decomposizione ortogonale.
   È vero che, se $U \oplus W = \mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n = U^\perp \oplus W^\perp$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

3. Si scriva la definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile.
   È vero che, se una matrice B è simile ad una matrice simmetrica, allora B è ortogonalmente diagonalizzabile?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si determinino i numeri complessi z tali che $z^3 = \frac{i\sqrt{2}}{1-i}$ e si disegnino nel piano di Gauss. Si scrivano tali numeri in forma algebrica. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ dei polinomi di grado minore di 5, con la base canonica (ordinata) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, si considerino i sottospazi U e W

$$U = \left\langle X^4 + X^2 - 1,\ 2X^4 + X^3 + X^2 - X,\ X^4 + X^3 - X + 1,\ X^3 - X^2 - X + 2 \right\rangle,$$

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^{4} x_i X^i \in V \;\middle|\; \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U e di W. (1 punto)

2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U e un sistema di equazioni parametriche per W. (2 punti)

3. Si verifichi se $U \oplus W = V$ e si scriva, se possibile, il polinomio $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ come somma di un polinomio $u \in U$ e di un polinomio $w \in W$. (2 punti)

4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali $U_1 \neq U_2$, tali che (2 punti)

$$U_1 \cap U = \langle 0 \rangle = U_2 \cap U \quad \text{e} \quad U_1 \oplus W = V = U_2 \oplus W.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ c+d \\ d-a \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base, $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, del dominio ed alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, del codominio. (1 punto)
2. Determinare una base del nucleo di f. Determinare le equazioni cartesiane dell'immagine di f. (2 punti)
3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ 2-t \\ t-1 \end{pmatrix}$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & 3-k \\ 0 & 2+k & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 3 & 0 & k-2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Determinare per quali valori del parametro k il numero reale 2 è un autovalore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di A_k. Si dica se per tali valori gli spazi di autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. Si dica se per tali valori la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile. (4 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico tridimensionale si considerino le rette

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} 2x - z + 4 = 0 \\ 4x - 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare la reciproca posizione, la distanza e i punti di minima distanza tra le due rette. (2 punti)
2. Sia $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare le equazioni cartesiane di una retta t, passante per P e incidente sia r che s, e si determinino i punti $\{R_1\} = r \cap t$ e $\{S_1\} = s \cap t$. (2 punti)
3. Determinare le equazioni cartesiane di una retta p, ortogonale e incidente sia con r che con s, e si determinino i punti $\{R_2\} = r \cap p$ e $\{S_2\} = s \cap p$. (1 punto)
4. Sia $\mathcal{Q}$ il quadrilatero di vertici R_1, R_2, S_2, S_1. Si verifichi che il quadrilatero $\mathcal{Q}$ non è contenuto in un piano, mentre il quadrilatero che ha come vertici i punti medi dei lati di $\mathcal{Q}$ è un parallelogramma. Si determini l'area di questo parallelogramma (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

4 settembre 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Siano $v \neq 0 \neq w$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si dia la definizione del prodotto vettore $v \times w$ e si spieghi perché $\|v \times w\|$ è uguale all'area del parallelogramma di lati v e w.

   È vero che se i vettori v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$, allora anche i vettori $v_1 \times v_2$, $v_1 \times v_3$, $v_2 \times v_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

2. Scrivere l'enunciato della formula delle dimensioni.

   È vero che, per ogni applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, si ha $\operatorname{im}\phi \oplus \ker\phi = \mathbb{R}^3$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

3. Scrivere l'enunciato del teorema spettrale.

   È vero che, se $B \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica, allora $B + 2i\mathbf{1}_n$ è invertibile in $M_n(\mathbb{C})$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si determinino i numeri complessi z tali che $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{i+1}$ e si disegnino nel piano di Gauss. Si scrivano tali numeri in forma algebrica. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ dei polinomi di grado minore di 5, con la base canonica (ordinata) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, si considerino i sottospazi U e W

$$U = \left\langle 2X^4 - X^2 + X + 1,\ 4X^4 + X^3 + X,\ 2X^4 + X^3 + X^2 - 1,\ X^3 + 2X^2 - X - 2 \right\rangle,$$

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^{4} x_i X^i \in V \ \middle|\ \begin{cases} 3x_0 + 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U e di W. (1 punto)
2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U e un sistema di equazioni parametriche per W. (2 punti)
3. Si verifichi se $U \oplus W = V$ e si scriva, se possibile, il polinomio $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ come somma di un polinomio $u \in U$ e di un polinomio $w \in W$. (2 punti)
4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali $U_1 \neq U_2$, tali che (2 punti)

$$U_1 \cap U = \langle 0 \rangle = U_2 \cap U \quad \text{e} \quad U_1 \oplus W = V = U_2 \oplus W.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c-d \\ d+a \\ a-b \\ b+c \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base, $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, del dominio ed alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, del codominio. (1 punto)
2. Determinare una base del nucleo di f. Determinare le equazioni cartesiane dell'immagine di f. (2 punti)
3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine del vettore $\left(\begin{smallmatrix} t \\ t-1 \\ 2-t \\ 1-t \end{smallmatrix}\right)$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 5 & 3+k \\ 0 & 3+k & 0 & 4 \\ 5 & 0 & k & 0 \\ 0 & 4 & 0 & k-3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Determinare per quali valori del parametro k il numero reale 2 è un autovalore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di A_k. Si dica se per tali valori gli spazi di autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. Si dica se per tali valori la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile. (4 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico tridimensionale si considerino le rette

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x - 4y + 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare la reciproca posizione, la distanza e i punti di minima distanza tra le due rette. (2 punti)
2. Sia $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Determinare le equazioni cartesiane di una retta t, passante per P e incidente sia r che s, e si determinino i punti $\{R_1\} = r \cap t$ e $\{S_1\} = s \cap t$. (2 punti)
3. Determinare le equazioni cartesiane di una retta p, ortogonale e incidente sia con r che con s, e si determinino i punti $\{R_2\} = r \cap p$ e $\{S_2\} = s \cap p$. (1 punto)
4. Sia $\mathscr{Q}$ il quadrilatero di vertici R_1, R_2, S_2, S_1. Si verifichi che il quadrilatero $\mathscr{Q}$ non è contenuto in un piano, mentre il quadrilatero che ha come vertici i punti medi dei lati di $\mathscr{Q}$ è un parallelogramma. Si determini l'area di questo parallelogramma (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1

Docente: Maurizio Candilera

4 settembre 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Siano m e n due interi positivi, con $m < n$. Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$, a due a due ortogonali, è vero che i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti?
   È vero che se i vettori $\{v_1, \dots, v_m,\}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$, esistono dei vettori $v_{m+1}, \dots, v_n$, a due a due ortogonali, tali che $\mathbb{R}^n = \langle v_1, \dots, v_m \rangle \oplus \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$?
   Motivare le risposte.

2. Scrivere l'enunciato del teorema di decomposizione ortogonale.
   È vero che, se $U \oplus W = \mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n = U^\perp \oplus W^\perp$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

3. Si scriva la definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile.
   È vero che, se una matrice B è simile ad una matrice simmetrica, allora B è ortogonalmente diagonalizzabile?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si determinino i numeri complessi z tali che $z^3 = \frac{i\sqrt{2}}{1+i}$ e si disegnino nel piano di Gauss. Si scrivano tali numeri in forma algebrica. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ dei polinomi di grado minore di 5, con la base canonica (ordinata) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, si considerino i sottospazi U e W

$$U = \left\langle 2X^4 + X^3 + X - 1,\ 4X^4 + X^3 - X^2 + X,\ 2X^4 - X^2 + 1,\ X^3 + X^2 + X - 2 \right\rangle,$$

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^{4} x_i X^i \in V \;\middle|\; \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U e di W. (1 punto)
2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U e un sistema di equazioni parametriche per W. (2 punti)
3. Si verifichi se $U \oplus W = V$ e si scriva, se possibile, il polinomio $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ come somma di un polinomio $u \in U$ e di un polinomio $w \in W$. (2 punti)
4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali $U_1 \neq U_2$, tali che (2 punti)

$$U_1 \cap U = \langle 0 \rangle = U_2 \cap U \quad \text{e} \quad U_1 \oplus W = V = U_2 \oplus W.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b+c \\ c-d \\ d+a \\ a-b \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base, $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, del dominio ed alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, del codominio. (1 punto)
2. Determinare una base del nucleo di f. Determinare le equazioni cartesiane dell'immagine di f. (2 punti)
3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine del vettore $\left(\begin{smallmatrix} t \\ 1-t \\ 2-t \\ t-1 \end{smallmatrix}\right)$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \left(\begin{smallmatrix} k & 0 & 1 & 3-k \\ 0 & 2+k & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 3 & 0 & k-2 \end{smallmatrix}\right) \in M_4(\mathbb{R}).$$

Determinare per quali valori del parametro k il numero reale 2 è un autovalore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di A_k. Si dica se per tali valori gli spazi di autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. Si dica se per tali valori la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile. (4 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico tridimensionale si considerino le rette

$$r = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare la reciproca posizione, la distanza e i punti di minima distanza tra le due rette. (2 punti)
2. Sia $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Determinare le equazioni cartesiane di una retta t, passante per P e incidente sia r che s, e si determinino i punti $\{R_1\} = r \cap t$ e $\{S_1\} = s \cap t$. (2 punti)
3. Determinare le equazioni cartesiane di una retta p, ortogonale e incidente sia con r che con s, e si determinino i punti $\{R_2\} = r \cap p$ e $\{S_2\} = s \cap p$. (1 punto)
4. Sia $\mathscr{Q}$ il quadrilatero di vertici R_1, R_2, S_2, S_1. Si verifichi che il quadrilatero $\mathscr{Q}$ non è contenuto in un piano, mentre il quadrilatero che ha come vertici i punti medi dei lati di $\mathscr{Q}$ è un parallelogramma. Si determini l'area di questo parallelogramma (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica e Aerospaziale – CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

4 settembre 2014

DOMANDE

Si risponda alle seguenti domande, giustificando in modo esauriente le risposte (risposte non giustificate non saranno accettate).

1. Siano $v \neq 0 \neq w$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si dia la definizione del prodotto vettore $v \times w$ e si spieghi perché $\|v \times w\|$ è uguale all'area del parallelogramma di lati v e w.

   È vero che se i vettori v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$, allora anche i vettori $v_1 \times v_2$, $v_1 \times v_3$, $v_2 \times v_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

2. Scrivere l'enunciato della formula delle dimensioni.

   È vero che, per ogni applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, si ha $\operatorname{im}\phi \oplus \ker\phi = \mathbb{R}^3$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

3. Scrivere l'enunciato del teorema spettrale.

   È vero che, se $B \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica, allora $B + 2i\mathbf{1}_n$ è invertibile in $M_n(\mathbb{C})$?
   (giustificare la risposta con una dimostrazione o con un controesempio)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si determinino i numeri complessi z tali che $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{i-1}$ e si disegnino nel piano di Gauss. Si scrivano tali numeri in forma algebrica. (4 punti)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ dei polinomi di grado minore di 5, con la base canonica (ordinata) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, si considerino i sottospazi U e W

$$U = \left\langle X^4 - 2X^3 - X + 1,\ X^4 - X^2 + 2,\ 2X^3 - X^2 + X + 1,\ X^4 - 4X^3 + X^2 - 2X \right\rangle,$$

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^{4} x_i X^i \in V \;\middle|\; \begin{cases} 3x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_0 - 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U e di W. (1 punto)
2. Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per U e un sistema di equazioni parametriche per W. (2 punti)
3. Si verifichi se $U \oplus W = V$ e si scriva, se possibile, il polinomio $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ come somma di un polinomio $u \in U$ e di un polinomio $w \in W$. (2 punti)
4. Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali $U_1 \neq U_2$, tali che (2 punti)

$$U_1 \cap U = \langle 0 \rangle = U_2 \cap U \quad \text{e} \quad U_1 \oplus W = V = U_2 \oplus W.$$

(voltare pagina)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d+a \\ a+b \\ b-c \\ c-d \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base, $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, del dominio ed alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, del codominio. (1 punto)
2. Determinare una base del nucleo di f. Determinare le equazioni cartesiane dell'immagine di f. (2 punti)
3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine del vettore $\left(\begin{smallmatrix} t \\ 1-t \\ t-2 \\ t-1 \end{smallmatrix}\right)$. (2 punti)

Esercizio 4. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 5 & 3+k \\ 0 & 3+k & 0 & 4 \\ 5 & 0 & k & 0 \\ 0 & 4 & 0 & k-3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Determinare per quali valori del parametro k il numero reale 2 è un autovalore di A_k; per tali valori del parametro, determinare la molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di A_k. Si dica se per tali valori gli spazi di autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali. Si dica se per tali valori la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile. (4 punti)

Esercizio 5. Nello spazio affine metrico tridimensionale si considerino le rette

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ 4x - 2y - 3z + 5 = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare la reciproca posizione, la distanza e i punti di minima distanza tra le due rette. (2 punti)
2. Sia $P = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Determinare le equazioni cartesiane di una retta t, passante per P e incidente sia r che s, e si determinino i punti $\{R_1\} = r \cap t$ e $\{S_1\} = s \cap t$. (2 punti)
3. Determinare le equazioni cartesiane di una retta p, ortogonale e incidente sia con r che con s, e si determinino i punti $\{R_2\} = r \cap p$ e $\{S_2\} = s \cap p$. (1 punto)
4. Sia $\mathscr{Q}$ il quadrilatero di vertici R_1, R_2, S_2, S_1. Si verifichi che il quadrilatero $\mathscr{Q}$ non è contenuto in un piano, mentre il quadrilatero che ha come vertici i punti medi dei lati di $\mathscr{Q}$ è un parallelogramma. Si determini l'area di questo parallelogramma (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.