A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1
Docente: Maurizio Candilera

16 febbraio 2015

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di sottospazio U di un K-spazio vettoriale V;

   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_m\}$ di W.

2. Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori non nulli dello spazio $\mathbb{R}^3$. Se si ha $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_2 \rangle = \langle 0 \rangle$, $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_3 \rangle = \langle 0 \rangle$, $\langle v_2 \rangle \cap \langle v_3 \rangle = \langle 0 \rangle$, allora è vero che $\mathbb{R}^3 = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \langle v_3 \rangle$? (proporre una dimostrazione, se vero, oppure un controesempio, se falso)

3. Siano dati i sottospazi $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ in $\mathbb{R}^6$ (ove tutte le inclusioni sono proprie) e i vettori $0 \neq u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2 \smallsetminus U_1$, $u_3 \in U_3 \smallsetminus U_2$. È vero che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti? (giustificare la risposta)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$; disegnarli nel piano di Argand Gauss e scriverli in forma algebrica. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $M = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 con la base canonica $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))\}$. Si considerino i sottospazi

$$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) \in M \mid a = 0 = d \right\} \qquad \text{e} \qquad U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}-1&0\\1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2&-1\\1&3\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

(a) Determinare la dimensione, una base e un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per i sottospazi D e U. I due sottospazi sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Scrivere, se possibile, la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ come somma di una matrice in D e di una matrice in U. (2 punti)

(c) Determinare (se esiste) un sottospazio T di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $D \oplus T = T \oplus U = M_2(\mathbb{R})$. Un tale sottospazio è univocamente determinato? (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $g_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ 8t-1 & 2-t & 0 \\ 4t-1 & 1-4t & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui g_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (4 punti)

2. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di autovettori per g_t e si scriva in tali casi una base ortogonale che diagonalizza g_t. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali quadrate di ordine 2 e lo spazio $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore di 3 con le rispettive basi canoniche $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ e $\mathcal{X} = \{1, X, X^2\}$.

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1+X) = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right), \quad f(X+X^2) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \quad f(1+X^2) = \left(\begin{smallmatrix}1&-2\\-2&1\end{smallmatrix}\right).$$

In caso affermativo si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{B}}(f)$ e si determinino nucleo e immagine di f, esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi. (4 punti)

(b) Si determini la controimmagine $f^{-1}\{\left(\begin{smallmatrix}0&2\\2&0\end{smallmatrix}\right)\}$. (2 punti)

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : x - y - z - 2 = 0.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Dire se esistono due rette t_1 e t_2, contenute nel piano π, parallele a s e tali che $dist(r, t_1) = dist(r, t_2) = dist(t_1, t_2)$. In caso affermativo, si determini la distanza tra le due rette e le equazioni cartesiane e parametriche delle due rette. In caso negativo, si spieghi perché due tali rette non possono esistere. (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1
Docente:Maurizio Candilera

16 febbraio 2015

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
   a) definizione di base di un K-spazio vettoriale V;
   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_m\}$ di W.
2. Siano u_1 e u_2 due vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$, e siano dati i sottospazi $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ tali che $\langle u_1, u_2 \rangle \oplus V = \mathbb{R}^4 = \langle u_1, u_2 \rangle \oplus W$. È vero che $V = W$? Se non è così, che relazioni ci sono tra i due sottospazi?
3. Siano dati i sottospazi $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ in $\mathbb{R}^6$ (ove tutte le inclusioni sono proprie) e i vettori $0 \neq u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2 \smallsetminus U_1$, $u_3 \in U_3 \smallsetminus U_2$. È vero che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti? (giustificare la risposta)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $25z^4 - 6z^2 + 1 = 0$; disegnarli nel piano di Argand Gauss e scriverli in forma algebrica. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $M = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 con la base canonica $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))\}$. Si considerino i sottospazi

$$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) \in M \mid b = 0 = c \right\} \qquad \text{e} \qquad U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1&2\\-1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&3\\-2&-1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

(a) Determinare la dimensione, una base e un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per i sottospazi D e U. I due sottospazi sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Scrivere, se possibile, la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ come somma di una matrice in D e di una matrice in U. (2 punti)

(c) Determinare (se esiste) un sottospazio T di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $D \oplus T = T \oplus U = M_2(\mathbb{R})$. Un tale sottospazio è univocamente determinato? (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $g_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 8t-1 & 4t-1 \\ 1 & 2-t & 1-4t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui g_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (4 punti)
2. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di autovettori per g_t e si scriva in tali casi una base ortogonale che diagonalizza g_t. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali quadrate di ordine 2 e lo spazio $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore di 3 con le rispettive basi canoniche $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ e $\mathcal{X} = \{ 1, X, X^2 \}$.

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1+X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad f(X+X^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad f(1+X^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

In caso affermativo si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{B}}(f)$ e si determinino nucleo e immagine di f, esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi. (4 punti)

(b) Si determini la controimmagine $f^{-1}\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$. (2 punti)

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : x - y + z + 2 = 0.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Dire se esistono due rette t_1 e t_2, contenute nel piano π, parallele a s e tali che $dist(r, t_1) = dist(r, t_2) = dist(t_1, t_2)$. In caso affermativo, si determini la distanza tra le due rette e le equazioni cartesiane e parametriche delle due rette. In caso negativo, si spieghi perché due tali rette non possono esistere. (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1
Docente:Maurizio Candilera

16 febbraio 2015

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di rango di una matrice;

   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_m\}$ di W.

2. Siano $u_1, \dots, u_r$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Sapendo che i vettori $\phi(u_1), \dots, \phi(u_r)$ sono linearmente indipendenti in W, si può concludere che ϕ è iniettiva? Altrimenti, cosa si può dire sul nucleo di ϕ?

3. Siano dati i sottospazi $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ in $\mathbb{R}^6$ (ove tutte le inclusioni sono proprie) e i vettori $0 \neq u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2 \smallsetminus U_1$, $u_3 \in U_3 \smallsetminus U_2$. È vero che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti? (giustificare la risposta)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$; disegnarli nel piano di Argand Gauss e scriverli in forma algebrica. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $M = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 con la base canonica $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))\}$. Si considerino i sottospazi

$$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) \in M \mid a = 0 = c \right\} \qquad \text{e} \qquad U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&3\\-1&-2\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

(a) Determinare la dimensione, una base e un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per i sottospazi D e U. I due sottospazi sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Scrivere, se possibile, la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ come somma di una matrice in D e di una matrice in U. (2 punti)

(c) Determinare (se esiste) un sottospazio T di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $D \oplus T = T \oplus U = M_2(\mathbb{R})$. Un tale sottospazio è univocamente determinato? (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $g_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4t-1 & 8t-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1-4t & 2-t \end{pmatrix}$$

in base canonica.

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui g_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (4 punti)

2. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di autovettori per g_t e si scriva in tali casi una base ortogonale che diagonalizza g_t. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali quadrate di ordine 2 e lo spazio $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore di 3 con le rispettive basi canoniche $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ e $\mathcal{X} = \{ 1, X, X^2 \}$.

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1+X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad f(X+X^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad f(1+X^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

In caso affermativo si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{B}}(f)$ e si determinino nucleo e immagine di f, esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi. (4 punti)

(b) Si determini la controimmagine $f^{-1}\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$. (2 punti)

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : x + y - z + 2 = 0.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Dire se esistono due rette t_1 e t_2, contenute nel piano π, parallele a s e tali che $dist(r, t_1) = dist(r, t_2) = dist(t_1, t_2)$. In caso affermativo, si determini la distanza tra le due rette e le equazioni cartesiane e parametriche delle due rette. In caso negativo, si spieghi perché due tali rette non possono esistere. (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale; CANALE 1
Docente:Maurizio Candilera

16 febbraio 2015

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

   a) definizione di somma e di somma diretta di due sottospazi, U e W, di un K-spazio vettoriale V;

   b) definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_m\}$ di W.

2. Si dica se esiste un'isometria, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dello spazio euclideo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ ($\mathbb{R}^3$ con l'usuale prodotto scalare) per cui si abbia $f(v) \in \langle v \rangle^\perp$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Una tale f è unica? (giustificare le risposte).

3. Siano dati i sottospazi $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ in $\mathbb{R}^6$ (ove tutte le inclusioni sono proprie) e i vettori $0 \neq u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2 \smallsetminus U_1$, $u_3 \in U_3 \smallsetminus U_2$. È vero che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti? (giustificare la risposta)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi, z, che soddisfano la condizione $25z^4 + 6z^2 + 1 = 0$; disegnarli nel piano di Argand Gauss e scriverli in forma algebrica. (3 punti)

Esercizio 2. Sia $M = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 con la base canonica $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))\}$. Si considerino i sottospazi

$$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) \in M \mid b = 0 = d \right\} \qquad \text{e} \qquad U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}-1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2&-1\\3&1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

(a) Determinare la dimensione, una base e un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per i sottospazi D e U. I due sottospazi sono in somma diretta? (3 punti)

(b) Scrivere, se possibile, la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ come somma di una matrice in D e di una matrice in U. (2 punti)

(c) Determinare (se esiste) un sottospazio T di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $D \oplus T = T \oplus U = M_2(\mathbb{R})$. Un tale sottospazio è univocamente determinato? (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $g_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2-t & 1-4t & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8t-1 & 4t-1 & t-2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

1. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui g_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. (4 punti)

2. Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di autovettori per g_t e si scriva in tali casi una base ortogonale che diagonalizza g_t. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali quadrate di ordine 2 e lo spazio $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore di 3 con le rispettive basi canoniche $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ e $\mathcal{X} = \{ 1, X, X^2 \}$.

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1 + X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad f(X + X^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad f(1 + X^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

In caso affermativo si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{X},\mathcal{B}}(f)$ e si determinino nucleo e immagine di f, esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi. (4 punti)

(b) Si determini la controimmagine $f^{-1}\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$. (2 punti)

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ tali che $f \circ g = 0$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino la retta r e il piano π di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : x - y - z + 2 = 0.$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della proiezione ortogonale, s, della retta r sul piano π e determinare la distanza tra r e s. (3 punti)

(b) Dire se esistono due rette t_1 e t_2, contenute nel piano π, parallele a s e tali che $dist(r, t_1) = dist(r, t_2) = dist(t_1, t_2)$. In caso affermativo, si determini la distanza tra le due rette e le equazioni cartesiane e parametriche delle due rette. In caso negativo, si spieghi perché due tali rette non possono esistere. (3 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.