

I numeri complessi sono nel programma di esame del corso di Analisi Matematica, ma la loro conoscenza e la capacità di eseguire semplici operazioni con essi è necessaria anche in questo corso. Chi senta la necessità di esercitarsi ulteriormente sull'argomento, può fare gli esercizi proposti in questo foglio.

Esercizio 1. Calcolare z^{-1} , w^{-1} , zw , zw^{-1} , $z^{-1}w$, z^2 , z^3 , z^4 , le radici quadrate di z e le radici cubiche di z per le seguenti coppie di numeri:

- (a) $z = 1 - i$, $w = 2 + i$;
- (b) $z = 1 + i$, $w = 1 - 2i$;
- (c) $z = 3e^{i\pi/3}$, $w = 2e^{i\pi/4}$
- (d) $z = \cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4}$, $w = -i$
- (e) $z = \cos \theta + i \sin \theta$, $w = \pm 2i$

Esercizio 2. Verificare le seguenti relazioni:

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \quad (1-2i)^4 = (2+i)^4, \quad z + \bar{z} = 2\Re z, \quad i\bar{z} - iz = 2\Im z, \quad \frac{z}{\bar{z}} = e^{2i\text{Arg} z}.$$

Esercizio 3. Si determinino i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ soddisfacenti alle seguenti condizioni:

- (a) $iz^2 + 1 = 2$;
- (b) $(z - 2i)^2 = 1$;
- (c) $z - \bar{z} = 5i$;
- (d) $|z|/z = i$.
- (e) $\bar{z}/z = e^{-i\pi/3}$.

Esercizio 4. Scrivere (e disegnare sul piano di Gauss) le radici n -esime di $1 - i$, $2 - 2i$, $3 - 4i$ per $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 5. Si determinino i numeri complessi z , soddisfacenti alla condizione $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

Esercizio 6. Si determinino i numeri complessi z , soddisfacenti alla condizione $z^2 + (i - 1)z + 6 + 2i = 0$.

Esercizio 7. Determinare quali $z \in \mathbb{C}$ soddisfano la disuguaglianza $|z| \leq |z + 1|$.

Esercizio 8. Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i sottoinsiemi

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(i(z+1)^2) < 1 \right\}, \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(i(z-2)^2) > 2 \right\}, \\ \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z-i}{z+2} \right| < 1 \right\}, \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{2z-i}{z+2} \right| \leq \sqrt{3} \right\}, \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z-2}{\bar{z}+2i} \right| \leq \sqrt{2} \right\}.$$

Esercizio 9. Sia $w = 1 + i\sqrt{3}$. Determinare $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $\Re(z_1) < 0$ e $0, w, z_1, z_2$ siano i vertici consecutivi di un quadrato nel piano di Gauss. Mostrare che $(w + z_2)(w - z_2) = 2w^2$ e $2wz_2 = z_1^2$.

Esercizio 10. Siano z_1 e z_2 le radici del polinomio $P(X) = X^2 + iX + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Si determinino modulo e argomento del numero complesso $(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^3$.

Esercizio 11. Sia $\zeta \neq 1$ una soluzione dell'equazione $X^{15} - 1 = 0$. Si mostri che $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{14} = 0$.

Esercizio 12. Determinare $\cos(5t)$, $\cos(8t)$, $\sin(6t)$, $\sin(9t)$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e loro potenze).

Esercizi di approfondimento

Esercizio 13. Si determinino gli elementi degli insiemi

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 - 2i = 0 \}, \quad B = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 + 2 = 0 \},$$

(a) Si disegnano sul piano di Gauss gli insiemi A , B e $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0 < \Im z \}$.

(b) Siano $\{\zeta_1\} = A \cap C$ e $\{\zeta_2\} = B \cap C$. È vero che $(\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_2)$ è un numero reale e $\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}$ è un numero immaginario? (calcolarli)

(c) Nel piano di Gauss, si disegni il parallelogramma di vertici 0 , ζ_1 , ζ_2 , $\zeta_1 + \zeta_2$.

(d) Si dia una condizione necessaria e sufficiente sui numeri complessi $z_1 \neq z_2$, affinché $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ sia un numero immaginario.

Esercizio 14. Calcolare perimetro ed area del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza unitaria.

Esercizio 15. Calcolare perimetro ed area del poligono regolare di n lati circoscritto alla circonferenza unitaria.

Esercizio 16. Si consideri l'insieme I dei numeri complessi del tipo $m + in$ al variare di m ed n tra i numeri interi (i indica l'unità immaginaria). Si determini una retta passante per il punto $z_0 = 1 + 2i$ del piano di Argand-Gauss che intersechi l'insieme I nel solo punto z_0 .

Esercizio 17. Si determinino i numeri complessi z , soddisfacenti alla condizione $z^3 - (1 + i)z^2 + (1 + 4i)z - 1 - 3i = 0$. (Si osservi che $z - 1$ divide il polinomio dato.)

Esercizio 18 (Formula di Cardano). Si consideri l'equazione generale di terzo grado, della forma $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$, con $a \neq 0$.

(a) Si verifichi che, posto $X = Y - \frac{b}{3a}$, si ottiene $aX^3 + bX^2 + cX + d = a(Y^3 + pY + q)$, con $p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$ e $q = \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}$.

(b) Si mostri che la *sostituzione di Viète*, $Y = W - \frac{p}{3W}$, porta l'equazione $Y^3 + pY + q = 0$ nella forma $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$. Infine, la moltiplicazione per W^3 e la posizione $W^3 = T$, riporta il problema alla risoluzione dell'equazione di secondo grado $T^2 + qT - \frac{p^3}{27} = 0$ ed all'estrazione delle radici terze delle soluzioni.

(c) Si osservi che, se w_1 è una soluzione dell'equazione $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$, allora anche $w_2 = -\frac{p}{3w_1}$ è una soluzione della stessa equazione e che $w_1 - \frac{p}{3w_1} = w_2 - \frac{p}{3w_2}$. Si concluda che dai 6 possibili valori per le radici di $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$, si ottengono al più tre valori distinti per le radici di $Y^3 + pY + q = 0$.

Esercizio 19 (Formule di Ferrari e Del Ferro). Si consideri l'equazione generale di quarto grado, della forma $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$, con $a \neq 0$.

(a) Si verifichi che, posto $X = Y - \frac{b}{4a}$, si ottiene $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(Y^4 + pY^2 + qY + r)$, per opportuni valori di p , q ed r .

(b) Si mostri che, introducendo una variabile ausiliaria, U , si ha

$$Y^4 + pY^2 + qY + r = \left(Y^2 + \frac{U}{2}\right)^2 - \left[(U - p)Y^2 - qY + \left(\frac{U^2}{4} - r\right)\right].$$

(c) Si osservi che, se u è una radice dell'equazione $q^2 - (U - p)(U^2 - 4r) = 0$, sostituendo u ad U nel termine di destra dell'identità nel punto precedente, si ottiene la differenza tra i quadrati di due polinomi nella Y , che è uguale al prodotto di due polinomi di secondo grado nella Y .

(d) Si concluda che il metodo precedente riconduce la risoluzione di un'equazione di quarto grado alla risoluzione di equazioni di terzo e secondo grado.

Esercizio 20. Si utilizzino i procedimenti descritti negli esercizi precedenti per trovare le radici dei seguenti polinomi

$$X^3 + 3iX - (1 + i), \quad X^3 + \frac{3(1 + i)}{\sqrt{2}}X^2 + (\sqrt{2} - 1)(1 + i), \quad X^4 + 2iX^2 - (1 - 2i)X + 2i.$$