Esercizio 1. Si dimostri che
$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$
è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e se ne determini una base.

Si dimostri che
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \mid a_{1,1} + a_{1,3} = 0 \; ; \; a_{1,1} - a_{2,1} = a_{2,3} \right\}$$
è un sottospazio di $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e se ne determini una base.

Si dimostri che
$$W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 \mid x_1 + ix_2 = 0 \right\}$$
è un sottospazio di $\mathbb{C}^2$ e se ne determini una base.

Esercizio 2. Si considerino S_1 e S_2 sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale delle matrici $M_{2,3}(\mathbb{R})$ definiti da:
$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare generatori di $S_1 \cap S_2$, e generatori di $S_1 + S_2$.
2. La somma di S_1 e S_2 è diretta?

Esercizio 3. Esiste un valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme $\{(1,t,0),(0,1,t),(0,0,t)\}$ generi $\mathbb{R}^3$?

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $\mathcal{G} = \{(1,2,1),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1),(2,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Dimostrare che $\mathcal{G}$ genera $\mathbb{R}^3$ e determinare tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{G}$ che generano tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si determini se i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dai vettori $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ soddisfacenti alle condizioni seguenti siano o meno sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

(a) $x_1 + 2x_2 = x_3$
(b) $|x_1 + x_2| = 1$
(c) $x_1^2 + 2x_2^2 = x_3$
(d) $x_1x_2 = x_2x_3$
(e) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
(f) $x_1^2 = x_2^2$ e $x_3 = 0$
(g) $2x_1 + x_2x_3 = 0$ e $x_1 = 0$

In ciascuno dei casi, cercare di disegnare l'insieme in questione.

Esercizio 6. Verificare che i vettori $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ generano $\mathbb{C}^2$ ed estrarne tutte le basi possibili.

Esercizio 7. Verificare che i vettori $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ generano $\mathbb{Q}^3$ ed estrarne tutte le basi possibili.

Esercizio 8. Calcolare somma, intersezione (evidenziando basi e dimensioni) per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

(a) $V = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

(b) $V = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $W = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

Esercizio 9. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che ogni vettore dello spazio $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si scrive in modo unico come combinazione $x = au + bv + cw$.

b) Determinare a, b, c nei seguenti casi: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Ripetere b) per u, v come sopra e $w' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ al posto di w. Cosa succede?

Esercizio 10. Si considerino i vettori $u = e_1 - 3e_3, v = -2e_2 + e_3, w = 2e_1 + e_2 + e_3, t = e_1 + e_3$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dimostri che i quattro vettori sono linearmente dipendenti fornendo una loro combinazione lineare nulla non banale.

(b) Si considerino i sottospazi $U = \langle u, v \rangle$ e $W = \langle w, t \rangle$. Si determinino delle basi di $U \cap W$ e $U + W$. è vero che $U + W = U \oplus W$?

(c) Si dica a quali dei sottospazi $U, W, U \cap W, U + W$ appartiene il vettore $v' = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ e si scriva una base di tali sottospazi contenente il vettore v'.

(d) Si scrivano tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ contenute nell'insieme $\{u, v', v, w, t\}$.

Esercizio 11. Sia $V = K[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 5.

(a) Si calcoli la dimensione di V su K.

(b) Esistono basi di V i cui elementi abbiamo tutti lo stesso grado?

(c) Esistono basi di V i cui elementi abbiano tutti il termine lineare aX nullo?

Esercizio 12. Sia $V = K[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale su K dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Si consideri il sottoinsieme U che contiene il polinomio nullo e tutti i polinomi di grado dispari. U è un sottospazio? Si descriva una base di $\langle U \rangle$.

Esercizio 13. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 5. Si consideri il sottoinsieme U formato dai polinomi $P(X)$ tali che $P(1) = P(-1) = 0$. U è un sottospazio? In caso affermativo si descriva una base di U. Sempre in caso affermativo si determini un sottospazio W tale che $V = U \oplus W$ (ne esistono più di uno? come determinarli tutti?)

Esercizio 14. Si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base di $U + W$ e si dica se la somma è diretta. Si determinino equazioni cartesiane per U, W, $U + W$ ed $U \cap W$.

Esercizio 15. Dati i sottospazi

$$U = \langle e_1 + e_4, 2e_1 + e_2 + 2e_4 + 2e_5, e_2 + e_4 \rangle, \quad W = \langle 2e_1 + e_2, e_4, 2e_1 + e_2 - 4e_4 + e_5 \rangle$$

di $\mathbb{R}^5$ determinare $U \cap W$ e $U + W$, loro dimensioni ed equazioni.