Esercizio 1. Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

quali di queste si possono sommare? E quali moltiplicare? Svolgere tutte le operazioni di somma e prodotto possibili.

Esercizio 2. Scrivere la matrice, rispetto alle basi canoniche, della proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ${}^t(x_1, x_2, x_3) \mapsto {}^t(x_1, x_2)$. Considerando su $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_3, e_1, e_2\}$ e su $\mathbb{R}^2$ la base $\{e_1 - e_2, e_1 + 2e_2\}$, scrivere la matrice di π rispetto a queste basi.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ una sua base.

(a) Si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$ di tutte le applicazioni lineari, $\phi : V \to V$, soddisfacenti alle condizioni

$$\phi(2v_1 + v_2) = 2v_1 - v_2, \quad \phi(v_1 + 2v_2 - v_3) = v_1 - v_2 + v_3, \quad \phi(v_1 - v_2 + v_3) = v_1 - v_3.$$

(b) Siano ϕ_1 e ϕ_2 due applicazioni descritte al punto (a). Si determini il nucleo di $\phi_2 - \phi_1$. Si dica se esistono ϕ_1 e ϕ_2 soddisfacenti alla condizione $\phi_2(v_1) = 2v_1 + 4v_3 = 2\phi_1(v_1)$. In caso affermativo, si determini $\mathrm{im}(\phi_2 - \phi_1)$.

(c) Le applicazioni, ϕ, descritte al punto (a) sono tutte invertibili? In caso contrario, si dia una condizione necessaria e sufficiente su $\phi(v_1 + v_2 + v_3)$ affinché ϕ sia invertibile.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5$, $u_2 = 2v_1 + v_3 + 2v_4 - v_5$, $u_3 = 2v_2 - 3v_3 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ 4X_1 - X_2 + 3X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_3 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = 2v_1 - v_3$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $\psi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $\phi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ tali che $\psi \circ \phi = 0$.

Esercizio 6. Siano V e W due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispettivamente, basi dei due spazi.

(a) Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle seguenti condizioni

$$\phi(2v_2 - 2v_1) = 6w_2 + 4w_3 - 2w_4; \qquad \phi(v_2 - v_3) = w_1 + 3w_2 - 2w_4; \qquad \phi(3v_1 - 3v_3) = 3w_1 - 6w_3 - 3w_4.$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per ciascuna di esse.

(b) Si determini una base dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\mathrm{im}\,\phi$ per ciascuna di tali ϕ e si determinino delle equazioni cartesiane per $\mathrm{im}\,\phi$ nel caso in cui ϕ non sia iniettiva.

Esercizio 7. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $\phi_A\colon M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$, definita ponendo $\phi_A(X) = AX - XA$, al variare di $X \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che si tratta di un'applicazione lineare e si determinino, al variare di A in $M_2(\mathbb{Q})$, il nucleo e l'immagine di ϕ_A.

Esercizio 8. Si consideri l'applicazione lineare $\pi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si verifichi che $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$.

(b) Si determinino i sottospazi $U = \ker \pi$ e $W = \operatorname{im} \pi$ e si mostri che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(c) Si scriva la matrice della proiezione su U parallelamente a W.

(d) Si scriva la matrice della simmetria di asse U e direzione W.

Esercizi di approfondimento

Esercizio 9. Sia X una matrice quadrata di ordine n. Si mostri che, se $AX = XA$ per ogni $A \in M_n(C)$, allora $X = c\mathbf{1}_n$ (matrice scalare).

Esercizio 10. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ e si osservi che si tratta di uno spazio vettoriale sia sul campo $\mathbb{C}$ che sul campo $\mathbb{R}$.

(a) Si calcolino le seguenti dimensioni: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

(b) Si consideri l'applicazione $\sigma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definita da $\sigma\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{smallmatrix}\right)$. Si verifichi che σ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare, ma non $\mathbb{C}$-lineare.

(c) Si consideri la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{C}$ e sia $\mathcal{E}_{\mathbb{R}} = \{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$. Si mostri che $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ è una base di $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Si caratterizzino le matrici rispetto a questa base degli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

(d) Sia $H = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ e sia $H' = \left\{ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \,\middle|\, \psi(cv) = \bar{c}\psi(v),\ \forall v \in \mathbb{C}^2, \forall c \in \mathbb{C} \right\}$. Si mostri che la corrispondenza $H \to H'$ definita da $\phi \mapsto \sigma \circ \phi$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

(e) Si concluda che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) = H \oplus H'$.

Esercizio 11. Dati due sottoinsiemi di un insieme finito, S_1 ed S_2, vale la formula $\#(S_1 \cup S_2) = \#S_1 + \#S_2 - \#(S_1 \cap S_2)$ e vi è un analogo per le dimensioni dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita, nelle Relazioni di Grassmann $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. Dati tre sottoinsiemi, si ha

$$\begin{aligned}\#(S_1 \cup S_2 \cup S_3) =& \#S_1 + \#S_2 + \#S_3 - \#(S_1 \cap S_2) - \#(S_1 \cap S_3) - \\ &- \#(S_2 \cap S_3) + \#(S_1 \cap S_2 \cap S_3);\end{aligned}$$

è vero o falso che vale l'analogo per i sottospazi, ovvero che

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) =& \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \\ &- \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)\ ?\end{aligned}$$

Esercizio 12. Sia $V = U \oplus W$ e siano date le basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di U e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ di W su $\mathbb{R}$. Sia inoltre T il sottospazio di V, $T = \langle u_1 + u_2 - w_1, u_3 - u_4 + w_2 - w_3, u_3 + u_4 + w_1, u_1 - u_2 + w_2 - w_3 \rangle$.

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio T nel sistema di coordinate associato alla base $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ di V. Si mostri che, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $u' \in T$ tale che $u' - u$ appartenga a W.

(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione che manda il vettore u di U in $u' - u$, ove $u' \in T$ è il vettore descritto nel punto precedente. Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino infine nucleo ed immagine di ϕ.