Esercizio 1. Calcolare polinomio caratteristico, autovalori (e loro molteplicità e nullità), autospazi delle seguenti matrici e dire se siano o meno diagonalizzabili. Se sono diagonalizzabili trovare una matrice invertibile, P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Una matrice reale 2×2 ha sempre almeno un autovettore?

Esercizio 3. Una matrice reale 3×3 ha sempre almeno un autovettore?

Esercizio 4. Una matrice invertibile è sempre diagonalizzabile? Viceversa, una matrice diagonalizzabile è sempre invertibile?

Esercizio 5. Se A è diagonalizzabile, la sua trasposta lo è?

Esercizio 6. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

(a) La relazione di simiglianza è una relazione di equivalenza sull'insieme $M_n(C)$.

(b) Se $A = a\mathbf{1}_n$ è una matrice scalare, allora la classe di equivalenza di A rispetto alla relazione di simiglianza contiene la sola matrice A.

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $\phi\colon \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica.

Esercizio 8. Si dica se è diagonalizzabile l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{C}^4$ che ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. In caso affermativo, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori relativi a ϕ.

Esercizio 9. Per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile? Per tali valori trovare una matrice diagonale simile ad A_t ed una matrice invertibile che realizzi la simiglianza.

Esercizio 10. Sia

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice in $M_n(\mathbb{Q})$ con tutte le entrate uguali ad 1. Dire se è diagonalizzabile e determinare polinomio caratteristico, autovalori e relativi spazi di autovettori.

Esercizi di approfondimento

Esercizio 11. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n ad elementi in $\mathbb{R}$. Se A e B sono simili su $\mathbb{C}$ allora sono simili su $\mathbb{R}$.

Esercizio 12. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \right\}$. Si dica se esiste un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente a tutte le seguenti condizioni.

(a) W è autospazio per ϕ.

(b) ϕ non è diagonalizzabile.

(c) $\phi(e_2 + e_3) = e_1 - 2e_2$.

Esercizio 13. Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con B_n la matrice quadrata di ordine n del tipo

$$B_n = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & a & 2a & a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a & 2a & a & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & a & 2a & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 2a \end{pmatrix},$$

ove a è una costante reale. Si scriva in modo esplicito $\delta_n(a) := \det B_n$ quale funzione della variabile a e si dia una condizione necessaria e sufficiente su a affinché esista finito $\lim_{n\to\infty} \delta_n(a)$.

Esercizio 14. Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. Si mostri che $\mathbf{1} + P^2$ è invertibile.

Esercizio 15. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che se il polinomio caratteristico di ϕ è prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$, allora ϕ è diagonalizzabile.

Esercizio 16. Sia $P \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice con tutte le entrate positive.

(a) Si mostri che P ha due autovalori reali distinti.

(b) Sia λ_1 l'autovalore maggiore di P e si indichi con $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $x_1 x_2 > 0$.

(c) Sia λ_2 l'autovalore minore di P e si indichi con $\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $y_1 y_2 < 0$.

Esercizio 17. Sia $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$, una matrice diagonale. Si mostri che ogni matrice diagonale si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{1}, \Delta, \dots, \Delta^{n-1}$ se, e solo se, gli autovalori di Δ sono a due a due distinti. [**Sugg.** Può essere utile ricordare il determinante di Van der Monde.]

Esercizio 18. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, si indichi con $\mathscr{C}_A$ il sottospazio vettoriale

$$\mathscr{C}_A = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid XA = AX \}.$$

(a) Si mostri che $\dim \mathscr{C}_A = \dim \mathscr{C}_B$ quando A e B sono simili.

(b) Si mostri che $\mathscr{C}_A = \left\langle \mathbf{1}, A, \dots, A^{n-1} \right\rangle$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.