

Programma del corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Canale 1 – Docente: Maurizio Candilera – A.A. 2012/13

Numeri Complessi

Numeri complessi ed operazioni. Coniugio e Valore assoluto. Rappresentazione algebrica, rappresentazione trigonometrica e rappresentazione esponenziale di un numero complesso. Piano di Gauss. Argomento di un numero complesso. Formule di De Moivre, radici n -esime di un numero complesso.

Spazi Vettoriali e Sottospazi

Definizione di spazio vettoriale ed esempi fondamentali. Definizione ed esempi di sottospazi. Criteri per sottospazi. Sottospazio generato. Intersezione e somma di sottospazi. Somma diretta. Dipendenza ed indipendenza lineare. Base di uno spazio vettoriale, definizione e prime proprietà. Esistenza di basi e loro cardinalità. Lemma di scambio e sue conseguenze. Dimensione di uno spazio vettoriale. Coordinate di un vettore rispetto ad una base (ordinata). Equazioni parametriche e cartesiane per un sottospazio vettoriale. Relazioni di Grassmann.

Applicazioni Lineari e Matrici

Applicazioni lineari. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Rango di un'applicazione lineare e Formula delle dimensioni. Iniettività e suriettività di un'applicazione lineare. Isomorfismi. Matrici. Lo spazio vettoriale $M_{m \times n}(C)$ e la sua base canonica. Prodotto di matrici. Matrici scalari e matrici diagonali. Matrici invertibili. Il gruppo $GL(n, C)$. Matrice associata ad un'applicazione lineare. Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici. Matrici di cambiamento di base. Cambiamento di coordinate di un vettore. Rango di una matrice. Matrice trasposta di una matrice data. Rango per riga e rango per colonna

Sistemi Lineari

Sistemi lineari. Scrittura matriciale ed interpretazione vettoriale. Teorema di Rouché–Capelli. Tecnica di Eliminazione (Gauss). Matrici Elementari ed operazioni elementari sulle righe. Equivalenza per righe e matrici a scalini. Sistemi lineari dipendenti da parametri.

Determinanti

Determinante di un endomorfismo e determinante di una matrice quadrata. Sviluppi di Laplace. Determinante ed invertibilità. Teorema di Binet. Applicazioni della tecnica di eliminazione al calcolo di determinanti. (senza dimostrazioni)

Autovalori e diagonalizzazione

Matrici simili. Autovalori, autovettori (autospazi, somma diretta). Polinomio caratteristico di un endomorfismo. Molteplicità algebrica e geometrica di autovalori, relazione tra loro e primo criterio di diagonalizzabilità.

Geometria Affine:

Definizione di spazio affine, riferimenti affini e coordinate. Sottospazi affini, equazioni parametriche e cartesiane. Intersezioni e sottospazi affini generati (congiungenti). Posizioni reciproche: sottovarietà parallele, incidenti, sghembe, Discussione geometrica di Rouché–Capelli. Fasci di piani nello spazio e di rette nel piano.

Geometria Euclidea:

prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n e sue proprietà, positività e norma. disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e misura di angoli. Ortogonalità, teoremi di Pitagora e di Carnot (coseno), proiezione ortogonale. Ortogonali di sottospazi e interpretazione euclidea delle equazioni cartesiane Basi ortonormali, procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Simmetrie e proiezioni ortogonali; gruppo ortogonale ed ortogonale speciale Descrizione esplicita delle matrici di O_2 e SO_2 ; Orientamento di uno spazio vettoriale (reale). Prodotto vettore nello spazio tridimensionale, sue proprietà; identità di Lagrange; Prodotto misto; Calcolo di volumi di parallelepipedi e semplici in \mathbb{E}^3 definizione di spazi euclidei, ortogonalità, riferimenti ortonormali distanza tra sottovarietà lineari, punti di minima distanza; calcoli di distanza, aree, volumi ed angoli in \mathbb{E}^2 e \mathbb{E}^3) isometrie (dirette e inverse). Isometrie vettoriali in dimensioni 2 e 3. Matrici simmetriche e teorema spettrale per matrici reali.