

1. In $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico indichiamo $\rho_{\mathbf{r}}$ la riflessione di asse una retta $\mathbf{r} \subset \mathbb{E}^2$, e $\sigma_{P_0, \theta}$ la rotazione di centro P_0 e angolo orientato θ .
 - (a) Scrivere le equazioni della rotazione $\sigma = \sigma_{P_0, \theta}$ con $P_0 = (1, 2)$ e $\theta = \pi/3$
 - (b) Scrivere le equazioni della riflessione $\rho = \rho_{\mathbf{r}}$ con $\mathbf{r}: x - y + 1 = 0$.
 - (c) Individuare la retta $\mathbf{s}$ per P_0 tale che $\rho_{\mathbf{r}} \circ \rho_{\mathbf{s}} = \sigma$.
2. In $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico sono assegnate:
la riflessione g di asse la retta $\mathbf{r}: x = 0$
la rotazione σ di centro $C = (1, 0)$ ed angolo orientato $\theta = \pi/2$.
 - (a) Scrivere le equazioni delle isometrie g , σ , $g \circ \sigma$.
 - (b) Dire se l'isometria $g \circ \sigma$ e' una traslazione, una riflessione, una glissoriflessione, o una rotazione, e caratterizzarla.
3. In $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico sono assegnate:
la riflessione ρ di asse la retta $\mathbf{r}: x - 2y = 1$
la rotazione σ di centro $P_0 = (1, 2)$ ed angolo orientato $\theta = \pi/2$.
 - (a) Scrivere le equazioni delle isometrie ρ e σ .
 - (b) Determinare le equazioni dell'isometria g tale che $\rho = g \circ \sigma$, indicare che tipo di isometria è g , e caratterizzarla.
4. Classificare le isometrie di una retta euclidea.
5. Siano $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ due rette incidenti di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$.
 - (a) Mostrare che la composizione $\rho_{\mathbf{s}} \circ \rho_{\mathbf{r}}$ è una rotazione di centro $P_0 = \mathbf{s} \cap \mathbf{r}$.
 - (b) Che relazione c'è tra $\rho_{\mathbf{s}} \circ \rho_{\mathbf{r}}$, e $\rho_{\mathbf{r}} \circ \rho_{\mathbf{s}}$?
6. Siano $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ due rette parallele distinte di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$.
 - (a) Verificare che $\rho_{\mathbf{r}} \circ \rho_{\mathbf{s}}$ e' una traslazione t_v di vettore v .
 - (b) Verificare che il vettore v è ortogonale a $\mathbf{r}$ (e a $\mathbf{s}$), e che $\|v\| = 2d(\mathbf{r}, \mathbf{s})$.
 - (c) Verificare che $\rho_{\mathbf{s}} \circ \rho_{\mathbf{r}}$ e' una traslazione t_{-v} di vettore $-v$.
7. In $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico, siano $\sigma_{C, \theta}$ e $\sigma_{D, \varphi}$ due rotazioni di centri rispettivamente $C = (2, 1)$ e $D = (1, 0)$ ed angoli orientati $\theta = \pi/2$ e $\varphi = \pi$.
 - (a) Scrivere le equazioni delle isometrie $f = \sigma_{C, \theta} \circ \sigma_{D, \varphi}$ e $g = \sigma_{D, \varphi} \circ \sigma_{C, \theta}$.
 - (b) Mostrare che f e g sono due rotazioni e calcolarne i centri e gli angoli di rotazione.

8. In $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico sono assegnati la retta $\mathbf{r}: x - y + 1 = 0$ ed il vettore $v = (1, 2)$.

- (a) Determinare le equazioni della glissoriflessione $f = t_v \circ \rho_{\mathbf{r}}$, dove t_v e' la traslazione di vettore v .
- (b) Esprimere f nella forma $f = t_{v'} \circ \rho_{\mathbf{r}'}$, dove $\mathbf{r}'$ è una retta di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ e $v' \parallel \mathbf{r}'$.
- (c) Determinare le rette unite di f .

9. In $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico $(O, \mathcal{E})$ è assegnata la retta $\mathbf{r}$ di equazioni $x - y - 1 = x + 2z - 1 = 0$, orientata dal vettore $(2, 2, -1)$.

- (a) Determinare un riferimento cartesiano $(O', \mathcal{V})$ equiorientato con $(O, \mathcal{E})$, dove la retta $\mathbf{r}$ coincida con l'asse y' del riferimento $(O', \mathcal{V})$.
- (b) Sia σ la rotazione di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ avente asse orientato $\mathbf{r}$, e angolo orientato $\pi/6$. Scrivere le equazioni di σ nel sistema di riferimento $(O', \mathcal{V})$.
- (c) scrivere le equazioni di σ nel sistema di riferimento canonico $(O, \mathcal{E})$.

10. In $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico $(O, \mathcal{E})$ sia σ la rotazione intorno all'asse delle z (orientato dal vettore e_3) e di angolo orientato $\pi/2$; sia t_v la traslazione di vettore $v = (0, 0, -1)$.

- (a) Scrivere le equazioni della glissorotazione $t_v \circ \sigma$.
- (b) Determinare i piani uniti di f .

11. In $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico $(O, \mathcal{E})$ sia σ la rotazione intorno all'asse delle y (orientato dal vettore e_2) e di angolo orientato $\pi/2$; sia $\rho = \rho_{\mathbf{p}}$ la riflessione rispetto al piano $\mathbf{p}: x + y - z = 1$.

- (a) Determinare le equazioni dell'isometria $f = \rho \circ \sigma$.
- (b) Verificare che f e' una riflessione rotatoria.
- (c) Esprimere f come la composizione di una riflessione $\rho' = \rho_{\mathbf{p}'}$, e di una rotazione τ , tali che il piano $\mathbf{p}'$ e l'asse di rotazione $\mathbf{r}'$ di τ siano ortogonali tra loro.

[Si osservi che $\mathbf{p}$ e l'asse delle y non sono ortogonali. Quindi il punto (c) richiede di trovare un'altra coppia piano e rotazione intorno ad una retta tali che f sia la riflessione rotatoria indotta da essi]

12. In $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con sistema di riferimento canonico $(O, \mathcal{E})$ considerare l'isometria f di equazioni

$$f(x, y, z) = (-y, x, -z) .$$

- (a) Verificare che f è un'isometria inversa con un unico punto fisso, ed è quindi una riflessione rotatoria.
- (b) Verificare che f e' ottenuta componendo una riflessione $\rho = \rho_{\mathbf{p}}$ con una rotazione di angolo orientato θ ed asse una retta orientata $\mathbf{r}$ ortogonale al piano $\mathbf{p}$. Determinare $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, θ , e le equazioni di ρ e σ .
- (c) Determinare i piani uniti di f .