

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni dell'equazione $z^2 - (1 + 3i)z - 4 + 3i = 0$.

(a) Si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni, z_1 e z_2 , dell'equazione.

(b) Si determinino $\alpha \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che la retta $r : \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + c = 0$ passi per z_1 e z_2 .

(c) Si determinino centro e raggio della circonferenza del piano di Gauss che si ottiene per riflessione della retta r rispetto alla circonferenza unitaria ($|z| = 1$).

Esercizio 2. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme

$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z - 2 - i}{\bar{z} + 2 - i} \right| < \alpha \right\}.$$

Si dica per quali valori di α il sottoinsieme non è vuoto e si descriva in tal caso D_α . Si disegnino (se esistono) i sottoinsiemi D_α per $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si abbozzi un disegno dei sottoinsiemi D_α al variare di α .

Esercizio 3. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}$.

(a) Si determini il dominio D della funzione f , si trovi, se esiste, un sottoinsieme di D su cui f induce una biiezione e si scriva l'espressione della funzione inversa.

(b) Si determinino, se esistono, i punti uniti della funzione f .

(c) Si determini l'insieme dei punti di D per cui $|f(z)| > 2$ e lo si rappresenti nel piano di Gauss.

(d) Si determinino le funzioni $f^2 = f \circ f$ ed $f^3 = f \circ f \circ f$. È vero che, dati $n, m \in \mathbb{N}$, si ha $f^n(z) = f^m(z)$ per ogni z se, e solo se, $n \equiv m \pmod{6}$?

Esercizio 4. Il semipiano di Poincaré è definito da $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ (numeri complessi la cui parte immaginaria è positiva). Il disco unità è $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (numeri complessi di modulo strettamente inferiore a 1). Mostrare che la funzione $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è una biiezione $P \rightarrow D$.

Determinare l'immagine della semicirconferenza di centro origine e raggio 1; e della semiretta verticale passante per l'origine.

Mostrare che i tratti di circonferenze di centro il punto $-i$ sono mandati in tratti di circonferenze di centro il punto 1.

Esercizio 5. Siano a, b, c, d numeri reali tali che $ad - bc = 1$. Consideriamo la funzione (detta trasformazione lineare fratta) $s: P \rightarrow P$ (P è il semipiano di Poincaré) data da $s(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Mostrare che $\Im(s(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$, cosicché in effetti s è definita da P a P .

Mostrare che s può essere scritta come composizione di funzione dei seguenti tre tipi: traslazione reale ($z \mapsto z + u$ con $u \in \mathbb{R}$), omotetie reali ($z \mapsto vz$ con $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$), controinversioni ($z \mapsto -\frac{1}{z}$).

Descrivere le figure formate da $s(z)$ se z descrive le semicirconferenze con centro sull'asse reale, oppure le semirette ortogonali all'asse reale.

Esercizio 6. Determinare quali $z \in \mathbb{C}$ soddisfano la disuguaglianza $|z| \leq |z + 1|$.

Esercizio 7. Siano $a = 5 + i9$ e $b = 3 - i4$ e si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{z-a}{bz-1}$.

(a) Si determini il dominio D della funzione f , si trovi, se esiste, un sottoinsieme di D su cui f induce una biiezione e si scriva l'espressione della funzione inversa.

(b) Si determinino, se esistono, i punti uniti della funzione f .

(c) Si determini l'insieme dei punti di D per cui $|f(z)| > 2$ e lo si rappresenti nel piano di Gauss.

(d) Si determini il sottoinsieme Q formato dai punti z tali che $(bz - 1)^4 = 1$ e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi $f_*(Q)$ ed $f^*(Q)$.

(e) Si determinino le soluzioni, z_1, z_2, z_3 , dell'equazione $z^3 + 2 - 2i$ e si disegnino sul piano di Gauss i tre punti corrispondenti ed i loro coniugati. Scrivere un'equazione che abbia come soluzioni tutti e soli i punti $z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$.

(f) Sia $n = 12$. Indicate con $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$ le soluzioni dell'equazione $z^n - 1 = 0$, si scrivano tutti gli esponenti j per cui $\{\zeta^{kj} \mid k = 1, \dots, n\} = \{\zeta^k \mid k = 1, \dots, n\}$.

Esercizio 8. Siano $z_1 = -3 + i4$ e $z_2 = 2 - i5$ due numeri complessi.

- (a) Calcolare i numeri complessi z_1/z_2 e z_2/z_1 e disegnarli nel piano di Gauss.
- (b) Si consideri la funzione $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $\phi(z) = z^2 + iz_1z - 12i$. Determinare se è iniettiva e/o suriettiva. Descrivere la controimmagine di 0. Esistono $w \in \mathbb{C}$ tali che la loro controimmagine contenga un solo elemento?

Esercizio 9. Si determini l'insieme $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2z\bar{z} + (4 + i5)z + (4 - i5)\bar{z} - 2 < 0\}$ e lo si disegni nel piano di Gauss. Sia $z_0 = -2 + i2$ e si determinino i numeri complessi tali che $z^3 - z_0 = 0$ e si dica se qualcuno di questi appartiene a D . Si consideri la funzione $f(z) = \frac{z-2+i}{z+1}$ e si determinino se esistono due sottoinsiemi massimali U, V di $\mathbb{C}$ tali che $f: U \rightarrow V$ sia una biiezione e si scriva esplicitamente l'inversa. Si determini l'insieme $f_*(D \cap U)$ e lo si disegni.

Esercizio 10. Si consideri l'insieme $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (2 - i)z - (2 + i)\bar{z} + 1 = 0\}$.

- (a) Si verifichi che $\mathcal{C}$ è un cerchio del piano di Gauss e se ne determinino centro e raggio.
- (b) Data la funzione $f(z) = \frac{z}{z-i}$ e si determinino i sottoinsiemi $f^*(\mathcal{C})$ e $f_*(\mathcal{C})$ dando delle equazioni soddisfatte dai loro elementi.
- (c) Si dica quale tra gli insiemi $f^*(\mathcal{C})$ e $f_*(\mathcal{C})$ è una retta oppure un cerchio e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi $\mathcal{C}$, $f^*(\mathcal{C})$ e $f_*(\mathcal{C})$.

Esercizio 11. Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{3z + i}{z + i}.$$

- (a) Si determinino il dominio e l'immagine di f e si determini la sua funzione inversa.
- (b) Si disegnino i sottoinsiemi H e $D = f_*(H)$, ove $H = \{z \in \mathbb{C} \mid i(z - \bar{z}) < 0\}$.
- (c) Si considerino le trasformazioni $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ed $ad - bc = 1$, e si mostri che per ogni tale g si ha $g_*(H) = H = g^*(H)$. Data $g(z) = z + 1$, sia h la trasformazione composta $h = f \circ g \circ f^{-1}$. Si determini $h_*(D)$.

Esercizio 12. Sia $z \in \mathbb{C}$.

- (a) Si disegni il sottoinsieme, D , del piano di Gauss definito dalle condizioni

$$D : \begin{cases} |z + \bar{z}| \leq 1 \\ z\bar{z} \geq 1 \end{cases}.$$

- (b) Si consideri la funzione $f(z) = -\frac{1}{z+1}$. Si determinino i domini, D_f , di f e D_g , della sua inversa, g , e si scriva esplicitamente la funzione $g(z)$. Si determini l'insieme $D_f \cap D_g \cap D$.
- (c) Si determini e si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(D)$.