

Esercizio 1. Si V un C -spazio vettoriale. Si deducano dagli assiomi di spazio vettoriale le seguenti relazioni:

$$(a) 0_C v = 0_V; \quad (b) \alpha 0_V = 0_V; \quad (c) (-1)v = -v; \quad (d) \alpha v = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_C \text{ o } v = 0_V$$

qualunque siano $v \in V$ ed $\alpha \in C$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $Q = \mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite ponendo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qualunque siano $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Si mostri che Q soddisfa a tutti gli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale reale, ad eccezione di uno (quale?); quindi Q NON è uno spazio vettoriale.

Esercizio 3. Si consideri la semiretta $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, e si verifichi che tale insieme ha una struttura di spazio vettoriale reale, ove si prenda come 'somma' di due vettori $x, y \in (0, +\infty)$ il loro prodotto in quanto numeri reali e come 'moltiplicazione' del vettore $x \in (0, +\infty)$ per lo scalare $c \in \mathbb{R}$ il numero reale x^c .

Esercizio 4. Dati i seguenti sottoinsiemi S_i di $\mathbb{R}^2$ dire quali di essi sono sottospazi.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \right\}, \quad S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 2 \right\}, \\ S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0 \right\}, \quad S_5 = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 5. Dati i seguenti sottoinsiemi S_i di $\mathbb{C}^3$ dire quali di essi sono sottospazi.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x - y = 0 \right\}, \quad S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x - 2y + z = 2 \right\}, \\ S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = 0 \right\}, \quad S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \right\}.$$

Esercizio 6. Sia $\mathcal{F}$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e si consideri il sottoinsieme

$$L = \{ \log_a(x) \mid 0 < a \neq 1 \} \cup \{0\}.$$

Si mostri che L è un sottospazio (di dimensione 1) di $\mathcal{F}$.

Esercizio 7. Nello spazio $\mathbb{R}^2$ si considerino i vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dimostrare che ogni vettore del piano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ si scrive in modo unico come combinazione $x = av + bw$ e determinare a, b nei seguenti casi: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8. Nello spazio $\mathbb{Q}^3$ si considerino i vettori $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che ogni vettore dello spazio $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si scrive in modo unico come combinazione $x = au + bv + cw$.

b) Determinare a, b, c nei seguenti casi: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Ripetere b) per u, v come sopra e $w' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ al posto di w . Cosa succede?

Esercizio 9. Verificare che i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$ ed estrarne tutte le basi possibili.

Esercizio 10. Verificare che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{C}^2$ ed estrarne tutte le basi possibili.

Esercizio 11. Verificare che i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{Q}^3$ ed estrarne tutte le basi possibili.

Esercizio 12. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 13. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio di $\mathbb{C}^3$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \\ 0 \end{pmatrix}$. Idem per il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Esercizio 14. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C . Si dimostri che

- (a) Un vettore v è linearmente indipendente se, e solo se, $v \neq 0$.
- (b) Due vettori v, w sono linearmente indipendenti se, e solo se, non sono proporzionali.
- (c) I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se, e solo se, nessuno di questi appartiene al sottospazio generato dai precedenti, ovvero se, e solo se, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_k \rangle$.

Esercizio 15. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V sul campo C . Dimostrare che le seguenti “operazioni elementari”

- i) scambiare di posto due vettori della base
 - ii) moltiplicare un vettore della base per uno scalare $c \in C$ non nullo
 - iii) sostituire il vettore v_i con il vettore $v_i + cv_j$ con $c \in C$ e $i \neq j$
- trasforma la base $\mathcal{V}$ in un'altra base di V .

Dimostrare poi che più in generale le operazioni elementari trasformano famiglie di generatori in famiglie di generatori e sottoinsiemi linearmente indipendenti in sottoinsiemi linearmente indipendenti.

Esercizio 16. Dato il sottospazio $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ di $\mathbb{R}^2$, dire quali dei seguenti sottospazi sono ad esso complementari: $\langle 0 \rangle$, $\mathbb{R}^2$, $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0 \right\}$.

Esercizio 17. Dato il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ di $\mathbb{Q}^3$, dire quali dei seguenti sottospazi sono ad esso complementari: $\langle 0 \rangle$, $\mathbb{Q}^3$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}$.

Esercizio 18. Si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{Q}^4$. Determinare una base di $U + W$ e si dica se la somma è diretta.

Esercizio 19. Dati i sottospazi

$$U = \langle e_1 + e_4, 2e_1 + e_2 + 2e_4 + 2e_5, e_2 + e_4 \rangle, \quad W = \langle 2e_1 + e_2, e_4, 2e_1 + e_2 - 4e_4 + e_5 \rangle$$

di $\mathbb{Q}^5$ determinare $U \cap W$ e $U + W$, loro dimensioni ed equazioni.

Esercizio 20. Si considerino i vettori $u = e_1 - 3e_3, v = -2e_2 + e_3, w = 2e_1 + e_2 + e_3, t = e_1 + e_3$ di $\mathbb{R}^3$.

- a) Si dimostri che i quattro vettori sono linearmente dipendenti fornendo una loro combinazione lineare nulla non banale.
- b) Si considerino i sottospazi $U = \langle u, v \rangle$ e $W = \langle w, t \rangle$. Si determinino delle basi di $U \cap W$ e $U + W$. È vero che $U + W = U \oplus W$?
- c) Si dica a quali dei sottospazi $u, W, U \cap W, U + W$ appartiene il vettore $v' = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ e si scriva una base di tali sottospazi contenente il vettore v' .
- d) Si scrivano tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ contenute nell'insieme $\{u, u', v, w, t\}$.