Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Siano z_1 e z_2 le radici del polinomio $P(X) = X^2 + iX + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Si determinino modulo e argomento del numero complesso $(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^3$.*

Svolgimento. $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 = (z_1 + z_2)z_1 z_2 = -i$ e $(-i)^3 = i$. Quindi il modulo è 1 e l'argomento $\frac{\pi}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia W un suo sottospazio. È vero che, per ogni spazio vettoriale T su C, si ha*

$$Hom_C(V/W, T) \cong \ker\left(Hom_C(V, T) \xrightarrow{R} Hom_C(W, T)\right),$$

ove l'applicazione R associa ad ogni omomorfismo $f : V \to T$ la sua restrizione al sottospazio W?

[In caso affermativo dare una dimostrazione in caso negativo proporre un controesempio.]

Svolgimento. È vero, e l'identificazione (canonica) tra i due insiemi è la seguente. Grazie alla proiezione canonica $\pi : V \to V/W$, dato un omomorfismo $u : V/W \to T$, possiamo considerare l'applicazione composta $u \circ \pi$, che è un elemento del nucleo di R. Viceversa, dato un omomorfismo $f : V \to T$ che si annulli sui vettori di W, è ben definita l'applicazione (lineare) che ad ogni elemento $x+W$ di V/W associa $f(x)$. Infatti, il valore di $f(x)$ non dipende dal rappresentante scelto per $x + W$ e l'applicazione è lineare. Queste due corrispondenze sono l'una l'inversa dell'altra. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino nucleo ed immagine di ϕ ed i sottospazi $\ker\phi + \mathrm{im}\,\phi$ e $\ker\phi \cap \mathrm{im}\,\phi$ scrivendo esplicitamente una base per ciascun sottospazio.*

(b) *Si scrivano delle basi per i sottospazi $\ker\phi^n$ e $\mathrm{im}\,\phi^n$ al variare di n tra i numeri interi positivi e si dica se esistano degli interi n tali che $\ker\phi^n \oplus \mathrm{im}\,\phi^n$.*

(c) *Sia $\Phi : M_5(\mathbb{R}) \to M_5(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(X) = AXA$ per ogni $X \in M_5(\mathbb{R})$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ e le loro dimensioni, giustificando chiaramente la risposta.*

(d) *È vero che esistono due matrici rettangolari, B_0 e C_0, tali che ogni elemento di $\mathrm{im}\,\Phi$ si scriva come $B_0 X C_0$ al variare di X in $M_3(\mathbb{R})$? In caso affermativo, si dica come determinare tali matrici e se la corrispondenza $M_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{im}\,\Phi$, che manda X su $B_0 X C_0$, è un isomorfismo di spazi vettoriali?*

Svolgimento. (a) Si ha

$$\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathrm{im}\,\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\ker\phi \cap \mathrm{im}\,\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \ker\phi + \mathrm{im}\,\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Si ha

$$\ker\phi^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \operatorname{im}\phi^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\\-1\end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\ker\phi^n = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \operatorname{im}\phi^n = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{per ogni } n \geq 3.$$

In particolare, $V = \ker\phi^n \oplus \operatorname{im}\phi^n$ per ogni $n \geq 3$.

(c) Identifichiamo $M_5(\mathbb{R})$ con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$, tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \to M_5(\mathbb{R})$. Un'applicazione lineare $\xi : V \to V$ appartiene a $\ker\Phi$ se, e solo se, $\xi(\operatorname{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. Viste le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ, si deduce che ξ varia in un sottospazio vettoriale di dimensione 16 (i vettori di $\operatorname{im}\phi$ devono essere mandati in vettori di $\ker\phi$, mentre i vettori di un complementare di $\operatorname{im}\phi$ possono essere mandati in arbitrari vettori di V).

Un'applicazione lineare $\eta : V \to V$ appartiene a $\operatorname{im}\Phi$ se, e solo se, $\operatorname{im}\eta \subseteq \operatorname{im}\phi$ e $\ker\eta \supseteq \ker\phi$. Infatti, se indichiamo con W un complementare di $\ker\phi$ e con w_1, w_2, w_3 una sua base, i vettori $\phi(w_1), \phi(w_2), \phi(w_3)$ formano una base di $\operatorname{im}\phi$, che possiamo completare con dei vettori u_4, u_5, ad una base di V. I vettori $\eta(w_i)$, $i = 1,2,3$, appartengono ad $\operatorname{im}\phi$ e quindi esistono dei vettori x_i tali che $\eta(w_i) = \phi(x_i)$, per $i = 1,2,3$. Se consideriamo l'applicazione lineare, $\xi : V \to V$, definita da $\xi(\phi(w_i)) = x_i$, per $i = 1,2,3$, e $\xi(u_4) = \xi(u_5) = 0$, si ha $\eta = \phi \circ \xi \circ \phi$.

(d) Si ha
$$\ker\phi^\perp = \langle v_1^* + v_3^*, 3v_2^* + 2v_4^*, v_4^* + 3v_5^* \rangle \qquad \text{e} \qquad \operatorname{im}\phi = \langle v_1 + v_3, v_4, 2v_2 + v_5 \rangle\,.$$

Consideriamo quindi le matrici

$$B_0 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C_0 = \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&3&0&2&0\\0&0&0&1&3\end{pmatrix}.$$

Presa una qualsiasi matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$, l'applicazione lineare $\eta : V \to V$ tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\eta) = B_0XC_0$, manda a zero i vettori di $\ker\phi$ ed ha l'immagine contenuta in $\operatorname{im}\phi$. La corrispondenza $M_3(\mathbb{R}) \to \operatorname{im}\Phi$, che manda X su B_0XC_0, è un omomorfismo di spazi vettoriali che è iniettivo, perché B_0 e C_0 hanno entrambo rango 3 e perciò B_0 è invertibile a sinistra e C_0 è invertibile a destra (spiegarsi bene questo fatto!). Quindi la corrispondenza è un isomorfismo. Dalla costruzione è chiaro come fare a determinare altre possibili matrici B_0 e C_0 che risolvano il problema dato. $\square$