Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 luglio 2012

ESERCIZIO 1. *Si identifichi il piano di Gauss con il piano euclideo reale, per cui i vettori $1, i$ formano una base ortonormale e si considerino i numeri complessi $a = 2 - i$ e $b = 2 - 3i$.*

(a) *Si verifichi che l'applicazione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definita da $z \mapsto az + b$, è un'affinità del piano euclideo. Si scriva la matrice di f nel riferimento $\mathcal{I} = \{O, 1, i\}$*

(b) *Si mostri che f è una similitudine del piano euclideo reale, ovvero si determini una costante reale positiva, λ tale che, per ogni coppia di numeri complessi, z_1, z_2, si abbia $\|f(z_1) - f(z_2)\| = \lambda\|z_1 - z_2\|$. È vero che esiste un'omotetia del piano euclideo reale che composta dopo f produce una rotazione? È vero che esiste un'omotetia del piano euclideo reale che composta dopo f produce una simmetria rispetto ad una retta?*

Svolgimento. (a) L'applicazione è affine come applicazione complessa e quindi, a maggior ragione, come applicazione dello spazio reale. L'applicazione lineare associata è $z \mapsto az$ e la matrice di f nel riferimento $\mathcal{I}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(b) La decomposizione al punto precedente fa vedere che f è composizione di un'isometria diretta (rotazione) e di un'omotetia di centro l'origine e coefficiente di dilatazione $\lambda = \sqrt{5}$. Quindi composta con l'omotetia inversa produce una rotazione, ma non può mai produrre una simmetria perché le omotetie del piano hanno tutte determinante positivo così come f. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino le matrici*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{C}). \qquad e \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{C})$$

(a) *Si determinino nucleo ed immagine delle applicazioni lineari associate alle due matrici (nelle basi canoniche di $\mathbb{C}^3$ e $\mathbb{C}^4$) e si scrivano delle equazioni cartesiane per ciascuno dei sottospazi così determinati.*

(b) *Si determinino tutte le inverse destre, sinistre o bilatere per ciascuna delle due matrici.*

(c) *Sia $\Phi : M_4(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(X) = A_0XB_0$ per ogni $X \in M_4(\mathbb{C})$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ indicando in particolare delle basi per ciascuno di questi sottospazi.*

(d) *Per ogni numero naturale n, si identifichi lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$ col suo duale tramite l'applicazione bilineare non degenere $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}\,{}^tAB$. Cosa si può dire dell'applicazione trasposta di Φ? Indicata con $\varepsilon_n(ij)$ la base canonica di $M_n(\mathbb{C})$, scrivere la matrice di Φ^* nelle basi canoniche.*

Svolgimento. (a) A_0 e B_0 hanno entrambe rango 3 (si vedano, ad esempio, il minore estratto dalle prime tre colonne della prima ed il minore estratto dalle ultime tre righe della seconda). Dunque, l'immagine di A_0 è $\mathbb{C}^3$, mentre il nucleo di A_0 è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e delle equazioni cartesiane per il nucleo sono date dal sistema lineare omogeneo di matrice A_0.

Il nucleo di B_0 è $\langle 0 \rangle$, mentre l'immagine è l'iperpiano di equazione $X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$.

(b) A_0 ha solo inverse destre del tipo $B_1 + \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, ove $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Analogamente, B_0 ha solo inverse sinistre del tipo $A_1 + \begin{pmatrix} a & -a & -a & a \\ b & -b & -b & b \\ c & -c & -c & c \end{pmatrix}$, ove $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Φ è suriettiva, perché, comunque si prenda $Y \in M_3(\mathbb{C})$ e si consideri la matrice $X = A_1YB_1 \in M_4(\mathbb{C})$, si ha $\Phi(X) = A_0(A_1YB_1)B_0 = (A_0A_1)Y(B_1B_0) = Y$, e quindi $Y \in \mathrm{im}\,\Phi$. Una base dell'immagine è quindi la base canonica di $M_3(\mathbb{C})$.

$\ker\Phi$ è un sottospazio di dimensione 7 di $M_4(\mathbb{C})$. Una matrice $X = (x_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ appartiene a questo sottospazio se, e solo se, $X(\operatorname{im} B_0) \subseteq \ker A_0$; ovvero sta nel sottospazio generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

che non sono una base del nucleo, ma solo dei generatori (per ottenere una base basta cancellare una qualsiasi di queste matrici).

(*d*) $\Phi^* : M_3(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{C})$ è iniettiva, perché $\ker\Phi^* = (\operatorname{im}\Phi)^\perp = \langle 0 \rangle$. Inoltre, $\operatorname{im}\Phi^* = (\ker\Phi)^\perp$. Infine

$$\Phi^*(\varepsilon_3(ij)) \circ \varepsilon_4(hk) = \varepsilon_3(ij) \circ \Phi(\varepsilon_4(hk)) = \operatorname{tr}(\varepsilon_3(ji)A_0\varepsilon_4(hk)B_0) = a_{ih}b_{kj}$$

che permette di calcolare la matrice di Φ^* (come?). □