Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $f : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ un'applicazione affine. È vero che se f assume lo stesso valore su due punti distinti allora assume lo stesso valore su tutti i punti? È vero che esiste un'applicazione affine $f : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ tale che $f(1+i) = 1+i$ e $f(1-i) = 3-i$? In caso affermativo, si determini l'espressione di f nel riferimento canonico di $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.*

Svolgimento. Un'applicazione affine della retta complessa si scrive nel riferimento canonico nella forma $z \mapsto az + b$, per opportuni numeri complessi a, b. Se $z_1 \neq z_2$ e $az_1 + b = az_2 + b$, allora $a = 0$ e l'applicazione manda tutti i punti della retta complessa in b.

Per trovare l'applicazione in questione, basta risolvere il sistema lineare $\begin{cases} a(1+i) + b = 1+i \\ a(1-i) + b = 3-i \end{cases}$, che porge $a = 1+i$, $b = 1-i$. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ delle rispettive basi. Data l'applicazione lineare $\phi : V \to W$ di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

si determinino delle basi per il nucleo e l'immagine di ϕ. Detto r il rango di ϕ, determinare (se esistono) r vettori $w_1, \dots, w_r$ in W ed r forme lineari $\xi_1, \dots, \xi_r$ in V^* tali che $\phi = w_1 \otimes \xi_1 + \cdots + w_r \otimes \xi_r$ e si scrivano le matrici nelle basi date delle applicazioni $w_i \otimes \xi_i$, $i = 1, \dots, r$.

Svolgimento. L'omomorfismo ϕ ha rango 2 e

$$\operatorname{im}\phi = \langle w_1 - w_3 + w_4, 2w_2 + w_3 \rangle, \qquad \ker\phi = \langle v_1 - v_2 + v_3, 3v_1 + v_3 - v_4, 2v_1 + v_3 - v_5 \rangle.$$

I vettori v_1 e v_3, generano un complementare di $\ker\phi$, perché le loro immagini tramite ϕ costituiscono la base dell'immagine scritta sopra. In particolare, $v_1 + \ker\phi$ e $v_3 + \ker\phi$ sono una base di $V/\ker\phi$ e $\ker\phi^\perp \subset V^*$ si può identificare con il duale di $V/\ker\phi$ [in che modo?]. Le forme lineari $\xi_1 = v_1^* + v_2^* + 3v_4^* + 2v_5^*$ e $\xi_2 = v_2^* + v_3^* + v_4^* + v_5^*$ sono la base di $\ker\phi^\perp$ duale della base fissata e quindi

$$\phi = \phi(v_1) \otimes \xi_1 + \phi(v_3) \otimes \xi_2 = (w_1 - w_3 + w_4) \otimes (v_1^* + v_2^* + 3v_4^* + 2v_5^*) + (2w_2 + w_3) \otimes (v_2^* + v_3^* + v_4^* + v_5^*).$$

In termini di matrici si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che è una decomposizione del tipo richiesto. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$ dotato della base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$, e siano fissati i sottospazi $V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ e $W = \langle e_5, e_6, e_7 \rangle$.*

(a) Si determinino, se esistono, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle condizioni

$$\phi(e_1 + e_3) = e_5 + e_6 + 2e_7, \qquad \phi(e_2 + e_4) = 3e_5 + 3e_6 + 6e_7,$$
$$\phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_5 + 3e_6 + 7e_7, \qquad \phi(e_2 - e_3 + e_4) = 4e_5 + 2e_6 + 3e_7.$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Di tali applicazioni si determinino nucleo ed immagine, scrivendo esplicitamente una base per ciascun sottospazio.

(b) Si consideri il sottoinsieme $U = \{ v + \phi(v) \in \mathbb{R}^7 \mid v \in V \}$. Si mostri che U è un sottospazio, detto il grafico dell'applicazione lineare ϕ, e si determinino la dimensione e delle equazioni cartesiane per U. Vi sono relazioni con il rango di ϕ? Si determinino delle eventuali basi per i sottospazi $U \cap V$ e $U \cap W$.

(c) Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché un sottospazio G di $\mathbb{R}^7$ sia il grafico di un'applicazione lineare $\psi : V \to W$.

(d) Sia $\mathbb{R}^{7*}$ lo spazio duale di $\mathbb{R}^7$ con la base duale $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_7^*\}$. Si determinino una base e delle equazioni cartesiane per il sottospazio $U^\perp$ e si dica che relazioni vi sono (se ve ne sono) tra questo sottospazio ed il grafico dell'applicazione trasposta $\phi^* : W^* \to V^*$.

Svolgimento. (a) I vettori $e_1 + e_3$, $e_2 + e_4$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_2 - e_3 + e_4$ sono una base di V e quindi l'applicazione lineare ϕ esiste ed è unica. Detta B la sua matrice nella basi date, si ha

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \operatorname{im}\phi = \langle 2e_5 - e_7, 2e_6 + 5e_7 \rangle, \quad \ker\phi = \langle e_1 - e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_3 - e_4 \rangle.$$

(b) La verifica che U è sottospazio è immediata. Infatti, $0 = 0 + \phi(0) \in U$ e, dati v_1, v_2 in V ed a_1, a_2 in $\mathbb{Q}$, si ha $a_1(v_1 + \phi(v_1)) + a_2(v_2 + \phi(v_2)) = (a_1v_1 + a_2v_2) + \phi(a_1v_1 + a_2v_2) \in U$, perché ϕ è lineare.

Un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix}$ appartiene ad U se, e solo se, $\begin{cases} x_5 = 2x_1 - x_3 + 3x_4 \\ x_6 = 2x_2 + x_3 + x_4 \\ x_7 = -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \end{cases}$ e quindi si tratta di un sottospazio di dimensione 4 (soluzione di un sistema lineare omogeneo di rango 3 in 7 incognite). La dimensione di U coincide con la dimensione di V, indipendentemente dal rango di ϕ. In particolare, i vettori di $U \cap V$ hanno le ultime tre componenti uguali a 0 e quindi sono i vettori di $\ker\phi$, una cui base è scritta sopra; mentre $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e non c'è una base.

(c) Un sottospazio G di $\mathbb{R}^7 = V \oplus W$ è il grafico di un omomorfismo $\psi : V \to W$ se, e solo se, $\dim G = \dim V$ e $G \cap W = \langle 0 \rangle$. Sotto queste ipotesi, la restrizione a G della proiezione su V, parallelamente a W, è un'applicazione iniettiva (il suo nucleo è $G \cap W$) e quindi, per motivi di dimensione, è suriettiva su V. Quindi, per ogni vettore $x \in V$ esiste un unico vettore $x + w \in G$, con $w \in W$. L'applicazione $x \mapsto w$ è l'omomorfismo cercato e quindi le condizioni date sono sufficienti. Lasciamo al lettore la verifica che le condizioni sono anche necessarie.

(d) I vettori $e_1 + \phi(e_1), \dots, e_4 + \phi(e_4)$ sono una base di U, quindi un vettore $y_1e_1^* + \cdots + y_7e_7^*$ appartiene a $U^\perp$ se, e solo se, le sue coordinate soddisfano al sistema

$$\begin{cases} Y_1 + 2Y_5 - Y_7 = 0 \\ Y_2 + 2Y_6 + 5Y_7 = 0 \\ Y_3 - Y_5 + Y_6 + 3Y_7 = 0 \\ Y_4 + 3Y_5 + Y_6 + Y_7 = 0 \end{cases}$$

ed una base è data dai vettori

$$2e_1^* - e_3^* + 3e_4^* - e_5^*, \quad 2e_2^* + e_3^* + e_4^* - e_6^*, \quad -e_1^* + 5e_2^* + 3e_3^* + e_4^* - e_7^*.$$

Il sottospazio $V^\perp = \langle e_5^*, e_6^*, e_7^* \rangle$ si identifica con W^* prendendo la base data come base duale della base e_5, e_6, e_7 di W; ed analogamente si identifica $W^\perp = \langle e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^* \rangle$ con lo spazio V^*. Con queste identificazioni $U^\perp$ è il grafico di $-\phi^*$. □