Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 giugno 2012

ESERCIZIO 1. *Si consideri il numero complesso $z_0 = 2 - i$.*

(a) Si verifichi che l'applicazione $\phi_{z_0}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definita da $\phi_{z_0}(z) = z_0 z$, per ogni $z \in \mathbb{C}$, è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare e se ne scriva la matrice nella base canonica, $\mathcal{I} = \{1, i\}$. Si calcoli $\det \phi_{z_0}$.

(b) Identificando il piano di Gauss col piano euclideo, per cui la base $\mathcal{I}$ è ortonormale, si mostri che ϕ_{z_0} è composizione di una dilatazione e di una rotazione (che commutano). Si scrivano le corrispondenti matrici nella base canonica.

Svolgimento. (a) La matrice cercata è $A = \alpha_{\mathcal{I},\mathcal{I}}(\phi_{z_0}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\det \phi_{z_0} = 5 = |z_0|^2$.

(*b*) $z_0 = |z_0| e^{i \operatorname{Arg} z_0} = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Quindi $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino le matrici*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{Q}) \qquad e \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q}).$$

(a) Si determinino nucleo ed immagine delle applicazioni lineari associate alle due matrici (nelle basi canoniche di $\mathbb{Q}^3$ e $\mathbb{Q}^4$) e si scrivano delle equazioni cartesiane per ciascuno dei sottospazi così determinati.

(b) Si determinino tutte le inverse destre, sinistre o bilatere per ciascuna delle due matrici.

(c) Sia $\Phi : M_3(\mathbb{Q}) \to M_4(\mathbb{Q})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(X) = A_0 X B_0$ per ogni $X \in M_3(\mathbb{Q})$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ indicando, in particolare le dimensioni e delle equazioni cartesiane per ciascuno di questi sottospazi (le coordinate vanno riferite alla base canonica dello spazio delle matrici).

(d) Sia S l'insieme delle applicazioni lineari $\Psi : M_4(\mathbb{Q}) \to M_3(\mathbb{Q})$ tali che $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{M_3(\mathbb{Q})}$. Sia D l'insieme delle applicazioni lineari $\chi : M_4(\mathbb{Q}) \to M_3(\mathbb{Q})$ tali che $\Phi \circ \chi = \mathrm{id}_{M_4(\mathbb{Q})}$. Si dimostri che S e D sono sottovarietà lineari di $\mathbb{A}(Hom_{\mathbb{Q}}(M_4(\mathbb{Q}), M_3(\mathbb{Q}))$ e se ne calcolino le dimensioni. Che relazioni ci sono con le inverse delle matrici A_0 e B_0?

Svolgimento. (a) A_0 e B_0 hanno entrambe rango 3 (si vedano, ad esempio, il minore estratto dalle prime tre righe della prima ed il minore estratto dalle ultime tre colonne della seconda). Dunque, il nucleo di A_0 è $\langle 0 \rangle$, mentre l'immagine di A_0 è l'iperpiano di equazione $X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$.

Analogamente, l'immagine di B_0 è tutto $\mathbb{Q}^3$, mentre il nucleo ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In particolare delle equazioni cartesiane sono date dal sistema lineare omogeneo di matrice B_0.

(*b*) A_0 ha solo inverse sinistre del tipo $A_1 + \begin{pmatrix} a & -a & -a & a \\ b & -b & -b & b \\ c & -c & -c & c \end{pmatrix}$, ove $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Analogamente, B_0 ha solo inverse destre del tipo $B_1 + \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, ove $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(*c*) Φ è iniettiva, perché, se $\Phi(X) = A_0 X B_0 = 0$, moltiplicando a sinistra per A_1 ed a destra per B_1, si deduce che $X = 0$. Quindi $\operatorname{im} \Phi$ è un sottospazio di dimensione $9 = \dim_{\mathbb{Q}} M_3\mathbb{Q}$, ed una matrice $X = (X_{ij})_{1\le i,j\le 4}$

appartiene a questo sottospazio se, e solo se, sono soddisfatte le equazioni omogenee

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} - x_{31} + x_{41} = 0 \\ x_{12} - x_{22} - x_{32} + x_{42} = 0 \\ x_{13} - x_{23} - x_{33} + x_{43} = 0 \\ x_{14} - x_{24} - x_{34} + x_{44} = 0 \\ x_{11} - x_{12} - x_{13} + x_{14} = 0 \\ x_{21} - x_{22} - x_{23} + x_{24} = 0 \\ x_{31} - x_{32} - x_{33} + x_{34} = 0 \\ x_{41} - x_{42} - x_{43} + x_{44} = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha rango 7 (si potrebbe cancellare un'equazione).

(d) Φ è iniettiva, ma non suriettiva, quindi ha solo inverse sinistre, per cui l'insieme D è la sottovarietà lineare vuota, di dimensione -1. Per quanto riguarda S, si tratta di una sottovarietà lineare passante per l'applicazione Ψ_1 ($\Psi_1(Y) = A_1 Y B_1$) e di dimensione 63. Detto K un complementare di $\operatorname{im}\Phi$ in $M_4(\mathbb{Q})$ ($\dim_{\mathbb{Q}} K = 7$), il sottospazio direttore è isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, M_3(\mathbb{Q}))$ che ha quindi la dimensione indicata sopra. Le inverse sinistre di Φ che si ottengono in modo analogo a Ψ_1, prendendo delle altre inverse in luogo di A_1 e B_1, formano una sottovarietà lineare di dimensione 6 contenuta in S. $\square$