Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 4 maggio 2012 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, *ed una matrice invertibile,* P, *tali che* $J = P^{-1}AP$.

(c) Sia $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{Q})$ *una matrice strettamente triangolare superiore* ($i \ge j \Rightarrow a_{ij} = 0$). *È vero o falso che il polinomio minimo di* A *è uguale a* X^n *se, e solo se,* $a_{i,i+1} \neq 0$ *per ogni* $i = 1, \dots, n-1$?

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-3)^5$ e quindi vi è il solo autovalore 3, con molteplicità (algebrica) 5. Gli autovettori relativi all'autovalore 3 generano il sottospazio $\ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle e_2, e_1 + e_4 \rangle$. Si ha

$$A - 3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3\mathbf{1})^3 = \mathbf{0};$$

e il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-3)^3$.

(b) La matrice di Jordan ha quindi un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 2. Il vettore $v_5 = e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 3. Posto $v_4 = (\phi - 3\mathrm{id})(v_5) = 3e_2 + 4e_3 - 4e_5$, $v_3 = (\phi - 3\mathrm{id})^2(v_5) = 4e_1 - 12e_2 + 4e_4$ e, $v_2 = e_1$, $v_1 = (\phi - 3\mathrm{id})(v_2) = 2e_1 + 2e_4$, si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) La matrice A ha polinomio caratteristico X^n e quindi è una matrice nilpotente (Teorema di Hamilton-Cayley). Il suo polinomio minimo coincide col polinomio caratteristico se, e solo se, la sua forma di Jordan è costituita da un unico blocco (di ordine n) e ciò accade se, e solo se, il nucleo di A ha dimensione 1, ovvero se, e solo se, $\mathrm{rk}\, A = n - 1$.

Se qualcuna tra le entrate $a_{i,i+1}$ della matrice A fosse nulla, tutti i minori di ordine $n-1$ di A sarebbero nulli e quindi A dovrebbe necessariamente avere rango minore di $n-1$. Ciò permette di concludere. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti P, Q, R ed i vettori w_1, w_2, ove*

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino equazioni parametriche e cartesiane dei piani $\mathbb{L} = P \vee Q \vee R$ ed $\mathbb{M} = O + \langle w_1, w_2 \rangle$. Si dica quale sia la reciproca posizione dei due piani.*

(b) *Detti U e W i rispettivi sottospazi direttori di $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ si verifichi che è ben definita la simmetria, σ_1, di asse $\mathbb{L}$ e direzione W e si scriva la sua matrice nel riferimento canonico. Si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, σ_2, di asse $\mathbb{M}$ e direzione U.*

(c) *È vero che la composizione $\sigma_1 \circ \sigma_2$ è un'omotetia? Con quale centro e quale coefficiente di dilatazione? Date due rette sghembe, r ed s in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$, ed un punto $X_0 \notin r \vee s$, esistono sempre un piano π, passante per X_0, ed un sottospazio W_0 tali che la simmetria di asse π e direzione W_0 trasformi la retta r nella retta s?*

Svolgimento. (a) I due piani (dimensione 2), hanno equazioni parametriche

$$\mathbb{L}: \begin{cases} X_1 = 2 - t_1 - 2t_2 \\ X_2 = 3t_1 + t_2 \\ X_3 = -1 + t_1 + 2t_2 \\ X_4 = 1 - t_1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{M}: \begin{cases} X_1 = s_1 - s_2 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = -s_1 + 2s_2 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

e quindi equazioni cartesiane

$$\mathbb{L}: \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_2 - X_3 + 5X_4 = 6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{M}: \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}.$$

I due piani sono incidenti nel punto $P_0 = O + 7e_1 - 6e_3$, ovvero $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \{P_0\}$.

(b) Per quanto visto, i sottospazio direttori dei due piani sono complementari e quindi sono ben definite le due simmetrie. In particolare, σ_1 è quell'unica trasformazione affine per cui $\sigma_1(X) - X \in W$ e $\frac{\sigma_1(X)+X}{2} \in \mathbb{L}$ per ogni punto X di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$. L'applicazione lineare associata a σ_2 è l'opposto dell'applicazione lineare associata a σ_1 ed il piano $\mathbb{M}$ contiene l'origine. Da ciò si ricava

$$A = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -1 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) La composizione tra le due simmetrie (in qualunque ordine) lascia invariato il punto $P_0 = \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e trasforma ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ nel suo opposto. Quindi si tratta dell'omotetia di centro P_0 e coefficiente -1.

Siano $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $s = P_2 + \langle v_2 \rangle$, e poniamo $M = \frac{P_1+P_2}{2}$, $v_3 = P_2 - P_1$, $v_4 = X_0 - M$. Le ipotesi date ci garantiscono che $\mathscr{V} = (M, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ è un riferimento nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$. L'applicazione affine f di matrice

$$\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{V}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la simmetria cercata, ovvero la simmetria di asse $\pi = M + \langle v_1 + v_2, v_4 \rangle$ e direzione $W_0 = \langle v_1 - v_2, v_3 \rangle$. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova scritta del 4 maggio 2012

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Sia $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{Q})$ una matrice strettamente triangolare inferiore ($i \le j \Rightarrow a_{ij} = 0$). È vero o falso che il polinomio minimo di A è uguale a X^n se, e solo se, $a_{i+1,i} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$?

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti P, Q, R ed i vettori w_1, w_2, ove

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane dei piani $\mathbb{L} = P \vee Q \vee R$ ed $\mathbb{M} = O + \langle w_1, w_2 \rangle$. Si dica quale sia la reciproca posizione dei due piani.
(b) Detti U e W i rispettivi sottospazi direttori di $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ si verifichi che è ben definita la simmetria, σ_1, di asse $\mathbb{L}$ e direzione W e si scriva la sua matrice nel riferimento canonico. Si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, σ_2, di asse $\mathbb{M}$ e direzione U.
(c) È vero che la composizione $\sigma_2 \circ \sigma_1$ è un'omotetia? Con quale centro e quale coefficiente di dilatazione? Date due rette sghembe, r ed s in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$, ed un punto $X_0 \notin r \vee s$, esistono sempre un piano π, passante per X_0, ed un sottospazio W_0 tali che la simmetria di asse π e direzione W_0 trasformi la retta r nella retta s?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3