Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-3)^5$ e quindi vi è l'unico autovalore, 3, con molteplicità (algebrica) 5. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 3) = \langle e_1, e_5 \rangle$. Si ha

$$A - 3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3)^4 = \mathbf{0}_5.$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-3)^4$.

(b) la matrice di Jordan di ϕ ha quindi un blocco di ordine 4 ed uno di ordine 1. Il vettore $v_4 = e_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 4 per l'autovalore 3 e si pone $v_3 = (\phi - 3)(v_4) = -e_2 - e_3 - 2e_5$, $v_2 = (\phi-3)^2(v_4) = -2e_3 - e_5$ e $v_1 = (\phi-3)^3(v_4) = 2e_1 - 2e_5$. Il vettore $v_5 = e_5$, appartiene a $\ker(\phi - 3)$ e completa i vettori dati ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si consideri l'endomorfismo $R_\phi : \mathrm{Hom}_C(V,V) \to \mathrm{Hom}_C(V,V)$ che manda $\eta : V \to V$ su $\eta \circ \phi$.*

(a) Si dimostri che ϕ ed R_ϕ hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio minimo.

(b) Si dimostri che ϕ è diagonalizzabile se, e solo se, lo è R_ϕ. Cosa dire degli spazi di autovettori e del polinomio caratteristico di ϕ ed R_ϕ?

Svolgimento. (a) Sia a un autovalore per R_ϕ e sia $\eta \in \mathrm{Hom}_C(V,V)$ un autovettore relativo ad a. Allora, per ogni vettore $v \in V$, si ha $\eta(\phi(v)) = a\eta(v) = \eta(av)$ e quindi $\eta(\phi(v) - av) = 0$. Ciò significa che $\mathrm{im}(\phi - a) \subseteq \ker\eta$ è un sottospazio diverso da V ($\eta \neq 0$) e quindi $\ker(\phi - a)$ deve avere dimensione positiva; ovvero a è un autovalore per ϕ. D'altra parte, sia a un autovalore per ϕ ed $\eta : V \to V$ un'applicazione lineare, non-nulla, che si annulli su tutti i vettori del sottospazio $\mathrm{im}(\phi - a)$ [spiegarsi bene perché esiste!]. Per ogni vettore v di V, si ha $\eta(\phi(v) - av) = 0$, ovvero $\eta(\phi(v)) = \eta(av) = a\eta(v)$ e quindi $R_\phi(\eta) = a\eta$.

È immediato verificare che $P(R_\phi) = R_{P(\phi)}$ per ogni polinomio $P(X) \in C[X]$, e che, dato un endomorfismo ψ, $R_\psi = 0$ se, e solo se, $\psi = 0$ [verificare i necessari dettagli!]. Da ciò si conclude che $P(R_\phi) = 0$ se, e solo se, $P(\phi) = 0$ e quindi che i due polinomi minimi coincidono.

(b) L'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile se, e solo se, il suo polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$. Poiché il polinomio minimo di ϕ coincide con quello di R_ϕ, anche quest'ultimo endomorfismo è diagonalizzabile.

Sia a un autovalore di ϕ. Abbiamo visto nel punto precedente che gli autovettori di R_ϕ relativi all'autovalore a, sono le applicazioni lineari $\eta : V \to V$ che si annullano su $\mathrm{im}(\phi - a)$. Indicato con W_a

un complementare di $\mathrm{im}(\phi - a)$ in $V = W_a \oplus \mathrm{im}(\phi - a)$, si ha che le $\eta : V \to V$, che si annullano su $\mathrm{im}(\phi - a)$, sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathrm{Hom}_C(W_a, V)$[(†)]. Ora,

$$\dim W_a = \dim V - \dim \mathrm{im}(\phi - a) = \dim \ker(\phi - a) = \mathrm{null}_\phi(a).$$

Quindi, la nullità (molteplicità geometrica) di a per R_ϕ è uguale a

$$\dim \mathrm{Hom}_C(W_a, V) = (\dim W_a)(\dim V) = (\mathrm{null}_\phi(a))(\dim V).$$

In particolare, se ϕ è diagonalizzabile, ciò significa che la molteplicità di a per per R_ϕ è uguale a $n\mathrm{molt}_\phi(a)$, ove $n = \dim V$. Si conclude che $P_{R_\phi}(X) = P_\phi(X)^n$. Nel caso in cui ϕ non sia diagonalizzabile, si può ragionare in modo analogo dimostrando che gli autovettori generalizzati in $\ker(R_\phi - a)^k$ sono gli endomorfismi nel nucleo di $R_{(\phi-a)^k}$ ovvero gli endomorfismi che si annullano su $\mathrm{im}(\phi - a)^k$. Dalle dimensioni dei sottospazi di autovettori generalizzati si può dedurre la molteplicità di un autovalore e quindi il polinomio caratteristico di R_ϕ è, in ogni caso, uguale a $P_\phi(X)^{\dim V}$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r ed s, di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino la distanza e l'angolo tra le due rette ed i punti di minima distanza.*
(b) *Si dimostri che, ruotando la retta s attorno alla retta r di un qualsiasi angolo $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, si ottiene una retta sghemba con s.*

Svolgimento. (a) La retta r passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La retta s passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il vettore differenza tra un generico punto di s ed un generico punto di r è $u = P - Q - t_2 w + t_1 v = \begin{pmatrix} 1+t_1-t_2 \\ -1+t_1-2t_2 \\ -t_1-t_2 \end{pmatrix}$, che è ortogonale ad entrambe le rette se, e solo se, $u \cdot v = 0 = u \cdot w$, ovvero se, e solo se, $\begin{cases} 3t_1 - 2t_2 = 0 \\ 2t_1 - 6t_2 = 1 \end{cases}$, che è equivalente a $\begin{cases} t_1 = -\frac{1}{7} \\ t_2 = -\frac{3}{14} \end{cases}$. Dunque i punti di minima distanza tra le due rette sono $P_0 = P - \frac{1}{7}v = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -1/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ e $Q_0 = Q - \frac{3}{14}w = \begin{pmatrix} -3/14 \\ 8/14 \\ -3/14 \end{pmatrix}$ e la distanza tra le due rette è $d = \|Q_0 - P_0\| = \frac{5\sqrt{14}}{14}$. Il coseno dell'angolo tra le due rette è $\frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(b) Possiamo supporre di fissare un sistema di riferimento ortonormale con l'origine nel punto P_0, la retta r come asse Z e la retta $P_0 + \langle Q_0 - P_0 \rangle$ come asse X. Allora la retta s ha equazione parametrica $s : \begin{cases} X = d \\ Y = s_0 t \\ Z = c_0 t \end{cases}$, ove t varia in $\mathbb{R}$, $c_0^2 + s_0^2 = 1$ e c_0 è il coseno dell'angolo tra r ed s. Fissato un angolo ϑ la rotazione di asse r ed angolo ϑ, ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ove } c = \cos\vartheta,\ s = \sin\vartheta.$$

La retta s viene trasformata nella retta di equazioni parametriche $s' : \begin{cases} X = cd - ss_0 t \\ Y = sd + cs_0 t \\ Z = c_0 t \end{cases}$. Perché le due rette siano parallele, dovrebbe aversi $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -ss_0 \\ cs_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \right\rangle$, che è possibile solo se $c = 1$, $s = 0$, ovvero $\vartheta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(†) Per i puristi, sarebbe preferibile scrivere $\mathrm{Hom}_C(V/\mathrm{im}(\phi - a), V)$ in luogo di $\mathrm{Hom}_C(W_a, V)$, considerando superflua la scelta di un complementare per $\mathrm{im}(\phi - a)$. Resta però un'opinione diffusa che, per gli spazi vettoriali, sia preferibile utilizzare i complementari in luogo dei quozienti ogni volta sia possibile (sic!). Forse qualcuno preferirebbe anche scrivere $\mathrm{coker}(\phi - a)$ per indicare il quoziente $V/\mathrm{im}(\phi - a)$.

Affinché le due rette siano incidenti deve aver soluzione il sistema lineare

$$\begin{cases} d = cd - ss_0t_2 \\ s_0t_1 = sd + cs_0t_2 \\ c_0t_1 = c_0t_2 \end{cases}$$

da cui si deduce di nuovo $c = 1$. $\square$