Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 luglio 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^3(X+3)^2$ e quindi vi sono due autovalori, 2 e -3, rispettivamente con molteplicità (algebrica) 3 e 2 e nullità 2 e 1. I relativi autovettori generano i sottospazi $\ker(\phi-2) = \langle e_1+e_3, e_4+e_5\rangle$ e $\ker(\phi+3) = \langle 2e_1+7e_3\rangle$. Si ha

$$A-2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 10 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & -10 & 35 & -19 & 19 \\ 0 & 30 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & -20 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix}, \quad A+3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-2)^2(X+3)^2$.

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 1 ed uno di ordine 2, relativi all'autovalore 2 e un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore -3. Il vettore $v_3 = 5e_2 - 4e_3 + 10e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore 2 e si pone $v_2 = (\phi-2)(v_3) = 18e_1 + 18e_3$ e $v_1 = e_4 + e_5$. Il vettore $v_5 = e_1 - e_3 + 3e_4 - 2e_5$, appartiene a $\operatorname{im}(\phi-2)^2$, ma non a $\ker(\phi+3)$. Aggiungendo il vettore $v_4 = (\phi+3)(v_5) = 4e_1 + 14e_3$, si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -4 & 14 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 10 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p_\phi(X) = (X-1)^n$. È vero o falso che ϕ è invertibile e simile al proprio inverso?*

Svolgimento. $\det\phi = (-1)^n p_\phi(0) = 1 \neq 0$ e quindi ϕ è invertibile. Inoltre, ϕ ha tutti gli autovalori uguali ad 1 e quindi $\phi = \mathrm{id} + \nu$ con $\nu = \phi - \mathrm{id}$ nilpotente, di ordine $k \geq 1$. Allora $\phi^{-1} = \mathrm{id} - \nu + \nu^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\nu^{k-1}$ e i due endomorfismi hanno gli stessi autovalori, essendo $\mu = -\nu + \nu^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\nu^{k-1}$ nilpotente. Si ha $\ker\nu^j \subseteq \ker\mu^j$ per $j = 1, \dots, k$ e $\mathbb{Q}^n = \ker\nu^k = \ker\mu^k$. Ricordando che ν ha periodo k, si ha che $\mu^{k-1} = (-\nu)^{k-1}$ e quindi anche $\ker\nu^{k-1} = \ker\mu^{k-1}$. Supponiamo quindi di avere $\ker\nu^j \subseteq \ker\mu^j$ e $\ker\nu^h = \ker\mu^h$ per ogni $h > j$. Se $v \in \ker\mu^j$, deve aversi

$$0 = \mu^j(v) = (-\nu + \nu^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\nu^{k-1})^j(v) = (-\nu)^j(v)$$

perché $\ker\nu^h = \ker\mu^h \supseteq \ker\mu^j$ per ogni $h > j$. Quindi le filtrazioni dei nuclei coincidono ad ogni grado e perciò i due endomorfismi hanno la stessa matrice di Jordan. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r, s e t, di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x + y - 3z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino la distanza e l'angolo tra le rette, prese a due a due e si determinino le coppie di punti di minima distanza. Se esistono tre punti, $R \in r$, $S \in s$, $T \in t$, tali che le coppie tra questi siano tutte di minima distanza, si calcoli l'area del triangolo RST.

(b) Si determini, se esiste, una rotazione, ρ, che porti r su s ed s su t e se ne scriva la matrice nel riferimento canonico. In caso affermativo, si scrivano le equazioni dell'immagine di t tramite ρ.

(c) Si scriva la matrice nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano $\pi : x + z = 1 + \sqrt{2}$. Se esiste l'applicazione ρ del punto precedente, si determinino la matrice e l'asse della rotoriflessione $\sigma \circ \rho$. In caso contrario si classifichi l'isometria che si ottiene componendo σ, dopo la riflessione nel punto $X_0 = O + e_1 + e_2 + \sqrt{2}e_3$. In ogni caso si indichino le sottovarietà lineari che restano unite.

Svolgimento. (a) Le tre rette sono parallele al vettore $v = e_1 - e_2$ e passano per i punti $R_0 = O + 2\sqrt{2}e_3$, $S_0 = O + 2\sqrt{2}(e_1 + e_2 + e_3)$ e $T_0 = O + 2e_1 + 2e_2$, che sono, a due a due, coppie di minima distanza perché appartengono tutti al piano $\pi = x - y = 0$ che è perpendicolare alle tre rette. Quindi le coppie di minima distanza si ottengono traslando con uno stesso multiplo di v coppie di questi punti. Inoltre, le distanze tra le tre rette sono

$$d(r, s) = \|R_0 - S_0\| = 4, \qquad d(r, t) = \|R_0 - T_0\| = 4, \qquad d(s, t) = \|S_0 - T_0\| = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

L'area del triangolo $R_0S_0T_0$ è uguale a $4\sqrt{2}$.

(b) Una rotazione che mandi la retta r su una retta ad essa parallela, deve avere asse parallelo ad r e quindi lasciare invarianti i piani ad essa ortogonali. Perciò dovrebbe mandare R_0 su S_0 ed S_0 su T_0. Una tale rotazione non può esistere, perché la distanza tra R_0 ed S_0 sarebbe diversa dalle distanze tra le immagini.

(c) La riflessione, σ, rispetto al piano π e la riflessione, τ, rispetto al punto X_0 hanno matrici

$$A = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{e} \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tratta quindi della rotazione di angolo π attorno all'asse

$$h : \begin{cases} x - z = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}; \qquad \text{ovvero } h = O + (1 - \sqrt{2})e_1 + e_2 + \langle e_1 + e_3 \rangle.$$

L'asse h è una retta di punti uniti. Sono uniti tutti i piani del fascio di asse h e del fascio di piani perpendicolari ad h. Infine sono unite tutte le rette perpendicolari ad h e passanti per un punto di h (le rette perpendicolari ad h nel fascio di piani di asse h). □