Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 19 giugno 2012 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^3 si considerino i piani di equazioni $\pi_1 : 2X - Y + Z = 3$ e $\pi_2 : Y + Z = 2$ nel riferimento canonico $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$.*

(a) Sia σ_1 la riflessione rispetto al piano π_1 e si scriva la matrice nel riferimento canonico dell'isometria che si ottiene applicando la traslazione τ di vettore $3e_1$, dopo la riflessione σ_1.

(b) Si decomponga l'isometria $\tau \circ \sigma_1$ nella composizione di una riflessione con una traslazione parallela al piano di riflessione. Detta σ_2 la riflessione di piano π_2, si scriva la matrice dell'isometria $f = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1$ e la si classifichi secondo Eulero indicando quali siano le sottovarietà lineari unite per questa trasformazione.

(c) Si determinino il punto P_1 di π_1 ed il punto P_2 di π_2 a distanza minima dall'origine. Si determinino la distanza e l'angolo formati dalla retta $P_1 \vee P_2$ con le rette unite per l'isometria f.

Svolgimento. (a) La matrice è $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\tau \circ \sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(*b*) Il vettore $t_0 = 5e_1 - e_2 + e_3$ è la somma di $t' = 4e_1 - 2e_2 + 2e_3$ perpendicolare al piano π_1 e di $t_1 = e_1 + e_2 - e_3$ parallelo al piano. Quindi l'isometria $\tau \circ \sigma_1$ è la glissoriflessione che si ottiene componendo la simmetria, σ, rispetto al piano $\pi : 2X - Y + Z - 6 = 0$ (parallelo a π_1 e passante per $O + t'/2$) con la traslazione, τ_1, di vettore t_1. Ovvero $\tau \circ \sigma_1 = \tau_1 \circ \sigma = \sigma \circ \tau_1$.

La riflessione σ_2 rispetto al piano π_2, lascia invariante il vettore t_1 che è parallelo a π e a π_2. Quindi

$$f = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma$$

è una roto-traslazione, composta da una rotazione di asse la retta $\pi \cap \pi_2$ e della traslazione τ_1. In particolare

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 3 & -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

e quindi è la rotazione di un angolo piatto (seguita dalla traslazione τ_1).

(*c*) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi $P_1 \vee P_2 = P_2 + \langle 2e_1 - 3e_2 - e_3 \rangle$. La retta unita per f è l'asse di rotazione, $h = \pi \cap \pi_2 = P_3 + \langle e_1 + e_2 - e_3 \rangle$, ove $P_3 = O + 4e_1 + 2e_2$. La distanza tra le due rette è $d = 2\sqrt{\frac{6}{7}}$ e l'angolo tra le due rette è $\frac{\pi}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{ed il piano } \pi : \begin{cases} 2X_2 + X_3 = -4 \\ X_1 - 2X_4 = -3 \end{cases}.$$

(a) Si determini un sistema di equazioni cartesiane per la retta $r = P_1 \vee P_2$. Si determinino la posizione reciproca, la distanza e i punti di minima distanza tra la retta r ed il piano π. Detto Q il punto di π a minima distanza da r, si determini l'area del triangolo P_1P_2Q.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane ed una rappresentazione parametrica della proiezione ortogonale della retta r su π. In uno spazio euclideo di dimensione $n \geq 4$, dati una retta ed un piano sghembi, la proiezione ortogonale della retta sul piano è sempre una retta? Si dia una dimostrazione di questo fatto o si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché la proiezione sia una retta.

(c) Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ due basi ortonormali di $\mathbb{R}^4$ che inducono lo stesso orientamento. È vero o falso che $v_1 + 3w_1, \dots, v_4 + 3w_4$ è una base di $\mathbb{R}^4$, concorde con le basi date?

Svolgimento. (*a*) I punti della retta r sono le soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} 2X_1 + X_4 = 2 \\ 2X_2 + X_4 = 0 \\ X_3 - X_4 = -2 \end{cases}$.

Si considerino i vettori, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il punto $P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La retta r è parallela al vettore $v_1 = P_1 - P_2$ ed il sottospazio direttore di π è $W = \langle v_2, v_3 \rangle$. P_3 è un punto di π e v_4 è un vettore ortogonale ad entrambe le sottovarietà lineari ($\langle v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^{\perp}$). Quindi la distanza tra r e π è la lunghezza della proiezione ortogonale di $P_1 - P_3$ lungo v_4, ovvero $\frac{|(P_1-P_3)\cdot v_4|}{\|v_4\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Si ha $P_1 - P_3 = \frac{4}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2 + \frac{8}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$ e quindi

$$P = P_1 - \frac{4}{5}v_1 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -4/5 \\ -2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} \in r \qquad \text{e} \qquad Q = P_3 + \frac{2}{5}v_2 + \frac{8}{5}v_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -8/5 \\ -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} \in \pi$$

sono i punti di minima distanza ($P - Q \in \langle v_4 \rangle$). L'altezza del triangolo relativa al lato P_1, P_2 è uguale alla distanza di π da r quindi l'area cercata è uguale $\frac{1}{2}\|P_1 - P_2\| \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

(*b*) Sia $W = \langle v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio direttore di π. La proiezione ortogonale di r sul piano π si ottiene intersecando la sottovarietà lineare $H = P_1 + \langle v_1 \rangle + W^{\perp}$ con il piano π, ed ha equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} 2X_1 + X_4 = 2 \\ 2X_2 + X_3 = -4 \\ X_1 - 2X_4 = -3 \end{cases} \qquad \text{e rappresentazione parametrica } s = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -8/5 \\ -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Quindi s è la sottovarietà lineare passante per Q (proiezione ortogonale di $P \in r$) e parallela al sottospazio $\langle w \rangle$ (proiezione ortogonale di $\langle v_1 \rangle$ su W).

In generale, dati una retta ed un piano sghembi, la proiezione ortogonale della retta sul piano è una retta se, e solo se, il sottospazio direttore della retta non è contenuto nell'ortogonale del sottospazio direttore del piano.

(*c*) Sia $R = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})$ la matrice di cambiamento di base che, per le ipotesi fatte, appartiene al gruppo ortogonale speciale SO_4, perché abbiamo due basi ortonormali concordi di $\mathbb{R}^4$. Quindi, la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $v_1 + 3w_1, \dots, v_4 + 3w_4$ rispetto alla base $\mathcal{V}$, è la matrice $\mathbf{1}_4 + 3R$. Dato un vettore v, si ha $(\mathbf{1}_4 + 3R)v = 0$ se, e solo se, $Rv = -\frac{1}{3}v$ che è possibile solo se $v = 0$, perché $\|Rv\| = \|v\|$ per ogni vettore di $\mathbb{R}^4$. Quindi $\mathbf{1}_4 + 3R$ è una matrice invertibile e perciò le sue colonne sono una base di $\mathbb{R}^4$. Per vedere che è concorde con l'orientamento, possiamo ragionare così. La matrice R è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (Teorema Spettrale per operatori normali) e un autovettore v_0 per R, relativo all'autovalore a, è un autovettore per $\mathbf{1}_4 + 3R$ relativo all'autovalore $1 + 3a$. Quindi gli autovalori di $\mathbf{1}_4 + 3R$ sono tutti del tipo $1+3a$, al variare di a tra gli autovalori di R. Poiché R è ortogonale, i suoi autovalori sono numeri complessi di modulo 1 e, se compare l'autovalore -1, deve comparire con molteplicità pari, $2k$, perché $\det R = 1$ e quindi nel determinante di $\mathbf{1}_4 + 3R$ compare il fattore $(1-3)^{2k} = 4^k > 0$. Inoltre, se compare tra gli autovalori di R il numero complesso a, compare anche il suo coniugato $\overline{a}$ e quindi nel determinante di $\mathbf{1}_4 + 3R$ compare il fattore $(1 + 3a)(1 + 3\overline{a}) = |1 + 3a|^2$ che è un numero reale positivo. Quindi, il determinante di $\mathbf{1}_4 + 3R$ è prodotto di numeri reali positivi e quindi la base è concorde con la base $\mathcal{V}$. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 giugno 2012 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo E^3 si considerino i piani di equazioni $\pi_1 : X + 2Y - Z = 3$ e $\pi_2 : X + Z = 2$ nel riferimento canonico $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$.

(a) Sia σ_1 la riflessione rispetto al piano π_1 e si scriva la matrice nel riferimento canonico dell'isometria che si ottiene applicando la traslazione τ di vettore $3e_2$, dopo la riflessione σ_1.

(b) Si decomponga l'isometria $\tau \circ \sigma_1$ nella composizione di una riflessione con una traslazione parallela al piano di riflessione. Detta σ_2 la riflessione di piano π_2, si scriva la matrice dell'isometria $f = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1$ e la si classifichi secondo Eulero indicando quali siano le sottovarietà lineari unite per questa trasformazione.

(c) Si determinino il punto P_1 di π_1 ed il punto P_2 di π_2 a distanza minima dall'origine. Si determinino la distanza e l'angolo formati dalla retta $P_1 \vee P_2$ con le rette unite per l'isometria f.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ed il piano } \pi : \begin{cases} 2X_3 + X_4 = -4 \\ 2X_1 - X_2 = 3 \end{cases}.$$

(a) Si determini un sistema di equazioni cartesiane per la retta $r = P_1 \vee P_2$. Si determinino la posizione reciproca, la distanza e i punti di minima distanza tra la retta r ed il piano π. Detto Q il punto di π a minima distanza da r, si determini l'area del triangolo P_1P_2Q.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane ed una rappresentazione parametrica della proiezione ortogonale della retta r su π. In uno spazio euclideo di dimensione $n \geq 4$, dati una retta ed un piano sghembi, la proiezione ortogonale della retta sul piano è sempre una retta? Si dia una dimostrazione di questo fatto o si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché la proiezione sia una retta.

(c) Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ due basi ortonormali di $\mathbb{R}^4$ che inducono lo stesso orientamento. È vero o falso che $v_1 + 2w_1, \dots, v_4 + 2w_4$ è una base di $\mathbb{R}^4$, concorde con le basi date?