Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Si determini, se esiste, un vettore w, per cui i vettori

$$w_1 = w, \quad w_2 = \phi(w), \quad w_3 = \phi^2(w), \quad w_3 = \phi^3(w), \quad w_5 = \phi^4(w)$$

formino una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ (giustificando la scelta). Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+1)^3(X-1)^2$ e quindi vi sono i due autovalori, 1 e -1, con molteplicità (algebrica) 2 e 3, rispettivamente. I relativi sottospazi di autovettori sono $\ker(\phi - 1) = \langle 3e_1 + 2e_3 \rangle$ e $\ker(\phi + 1) = \langle e_1 + e_3 \rangle$. Necessariemente, il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico, perché per ogni autovalore vi è un unico blocco di Jordan.

(b) Si ha

$$A + 1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -12 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 8 & 0 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^3 = \begin{pmatrix} 24 & 10 & -24 & 0 & 42 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -12 \\ 16 & 6 & -16 & 0 & 26 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

la matrice di Jordan di ϕ ha quindi un blocco di ordine 3 relativo all'autovalore -1 ed uno di ordine 2 relativo all'autovalore 1. Il vettore $v_3 = -6e_2 + e_3 + 2e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore -1 e si pone $v_2 = (\phi + 1)(v_3) = -4e_1 - 4e_3 + 2e_4$, $v_1 = (\phi + 1)^2(v_3) = 4e_1 + 4e_3$. Il vettore $v_5 = e_1 + 2e_2 + e_3 - e_4 - 2e_5 \in \operatorname{im}(\phi + 1)^3 = \ker(\phi - 1)^2$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 relativo all'autovalore 1 e si pone $v_4 = (\phi - 1)(v_5) = -6e_1 - 4e_3$. Si ha così una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Il vettore $w = v_3 + v_5 = e_1 - 4e_2 + 2e_3 - e_4$, è somma di due autovettori generalizzati di periodo massimo. Poiché lo spazio è somma diretta dei sottospazi di autovettori generalizzati e ϕ induce endomorfismi su quei sottospazi [Lemma di Decomposizione], il vettore w si annulla applicando l'endomorfismo $P(\phi)$, con $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, se, e solo se, si annullano le due componenti nei sottospazi di autovettori generalizzati; quindi se, e solo se, $P(X)$ è divisibile sia per $(X+1)^3$ che per $(X-1)^2$ e ha quindi grado almeno 5. Ciò permette di concludere (perché?). La matrice di ϕ nella base $\mathcal{W}$ è la matrice compagna del polinomio minimo di ϕ, ovvero.

$$C = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione affine $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

nei riferimenti (O, e_1, e_2, e_3) e $(O', \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Si determinino equazioni cartesiane per l'immagine di f, per la controimmagine di un generico punto, $O' + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2$, e per la controimmagine di una generica retta $a_1Y_1 + a_2Y_2 = a_0$.

Svolgimento. Per ogni punto $P = O+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$, si ha $f(P) = O'+(x_1+2x_2+4x_3)\varepsilon_1+(2x_1+4x_2 + 8x_3 + 1)\varepsilon_2$ e quindi le coordinate di $f(P)$ soddisfano all'equazione $2Y_1 - Y_2 + 1 = 0$, che è l'equazione cartesiana di $\operatorname{im} f$. Se un punto $Q \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ appartiene all'immagine (risp. se un sottoinsieme U di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ ha intersezione non banale con $\operatorname{im} f$), la controimmagine di Q ha equazione $f^{-1}(Q) : X_1 + 2X_2 + 4X_3 = y_1$, ove $Q = O' + y_1\varepsilon_1 + (2y_1 + 1)\varepsilon_2$ (risp. $f^{-1}(U)$ è unione di iperpiani paralleli a $X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 0$; uno per ogni punto di $U \cap \operatorname{im} f$).

Se la retta $r : a_1Y_1 + a_2Y_2 = a_0$ non è parallela a $\operatorname{im} f : 2Y_1 - Y_2 + 1 = 0$, interseca quest'ultima in un unico punto, Q, e $f^{-1}(r) = f^{-1}(r \cap \operatorname{im} f) = f^{-1}(Q)$. Quando la retta r è parallela, ma diversa da $\operatorname{im} f$, la controimmagine è $\varnothing$. Infine la controimmagine di $\operatorname{im} f$ è tutto $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. □

ESERCIZIO 3. *Siano P, Q, R, S i vertici di un tetraedro non degenere nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$.*

(a) Si dimostri che, se $P \vee Q$ è ortogonale a $R \vee S$ e $P \vee R$ è ortogonale a $Q \vee S$, allora anche $P \vee S$ è ortogonale a $Q \vee R$.

(b) Si dimostri che, nelle ipotesi del punto (a), le quattro altezze del tetraedro concorrono ad uno stesso punto (tetraedro ortocentrico).

Svolgimento. (a) Siano $Q - P = v_1$, $R - P = v_2$, $S - P = v_3$. Le ipotesi sono quindi equivalenti alle condizioni $v_1 \cdot (v_2 - v_3) = 0$ e $v_2 \cdot (v_1 - v_3) = 0$. Sottraendo la prima dalla seconda si ottiene esattamente $v_3 \cdot (v_1 - v_2) = 0$, ovvero l'ortogonalità della terza coppia di lati opposti.

(b) Scegliamo un riferimento ortonormale per cui il punto P abbia coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$, il punto S abbia coordinate $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed i punti Q ed R abbiano coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, rispettivamente. Chiaramente $h \neq 0$ ed osserviamo che, se $a = 0$, l'origine del riferimento coincide con S e, nelle ipotesi del punto (a), le tre altezze si incontrano proprio in quel punto.

Supponiamo quindi $a \neq 0$. La condizione che $P \vee Q$ sia ortogonale a $R \vee S$ dà $x_1 = y_1$ e, unita alla condizione che $P \vee R$ sia ortogonale a $Q \vee S$, dà $x_1^2 - ax_1 + x_2y_2 = 0$ (la condizione che $P \vee S$ sia ortogonale a $Q \vee R$ produce la medesima condizione). Da ciò si deduce che il vettore $n = \begin{pmatrix} hx_1 \\ hx_2 \\ ax_1 \end{pmatrix}$ è ortogonale al piano $P \vee R \vee S$ e l'altezza $Q + \langle n_1 \rangle$ incontra l'altezza $O \vee P$ nel punto X di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -ax_1/h \end{pmatrix}$. Si ha

$$\langle S - X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle R - P, Q - P \rangle^\perp \quad \text{e} \quad \langle R - X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} hx_1 \\ hy_2 \\ ax_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle Q - P, S - P \rangle^\perp$$

e quindi il punto X è l'intersezione delle quattro altezze del tetraedro. □