Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 giugno 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+2)^5$ e quindi vi è l'unico autovalore -2, con molteplicità (algebrica) 5. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi+2) = \langle e_1 + e_3, 5e_1 - e_2 - e_5\rangle$. Si ha

$$A+2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A+2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+2)^3 = \mathbf{0}_5.$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X+2)^3$.

(b) Si ha quindi $\operatorname{rk}(\phi+2) = 3$ e $\operatorname{rk}(\phi+2)^2 = 1$, per cui la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 2. Il vettore $v_3 = e_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore -2 e si pone $v_2 = (\phi+2)(v_3) = 3e_3$ e $v_1 = (\phi+2)^2(v_3) = -3e_1 - 3e_3$. Il vettore $v_5 = 5e_4 + e_5$, appartiene a $\ker(\phi+2)^2$, ma non al sottospazio $\langle v_2\rangle \oplus \ker(\phi+2)$. Aggiungendo il vettore $v_4 = (\phi+2)(v_5) = 5e_1 + 3e_2 + 20e_3 + 3e_5$, si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e $\phi : V \to V$ un endomorfismo per cui il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico. È vero che esiste un vettore $v \in V$ tale che $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ è una base di V? Come fare per trovarlo?* [**sugg.** …pensare al Lemma di Decomposizione.]

Svolgimento. Sia $p_\phi(X) = \lambda_\phi(X) = (X-a_1)^{c_1} \cdots (X-a_r)^{c_r}$ il polinomio minimo di ϕ con le radici, $a_1, \dots, a_r$, a due a due distinte. Per il Lemma di Decomposizione, posto $W_i = \ker(\phi - a_i)^{c_i}$, per $i = 1, \dots, r$, si ha $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$. In ogni sottospazio W_i, $i = 1, \dots, r$, esiste un autovettore generalizzato, w_i, di periodo esattamente c_i e poniamo $v = w_1 + \cdots + w_r$. Se $P(X)$ è un polinomio tale che $P(\phi)(v) = 0$, deve annullarsi la componente $P(\phi)(w_i)$ per ogni $i = 1, \dots, r$ (spiegarsi bene questo fatto!). Deve quindi aversi $(X-a_i)^{c_i} \mid P(X)$ per $i = 1, \dots, r$, e il grado di $P(X)$ deve essere maggiore o uguale della somma dei c_i, ovvero della dimensione di V. Ne consegue che $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ sono linearmente indipendenti e quindi una base di V. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r ed s, di equazioni:*

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \sqrt{3}x + y - z - 3 = 0 \\ 3x - y - \sqrt{3}z + 4 + \sqrt{3} = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino la distanza e l'angolo tra le due rette ed i punti di minima distanza, $P_0 \in r$ e $Q_0 \in s$. Presi, un punto $P_1 \in r$ a distanza 1 da P_0 e un punto $Q_1 \in s$ a distanza 1 da Q_0, si calcoli il volume (non orientato) del tetraedro di vertici $P_0P_1Q_0Q_1$.

(b) *Si determini un piano, π, passante per P_0, e parallelo al vettore $P_0 - Q_0$ e a una direzione bisettrice tra la direzione di r e la direzione di s. Si scriva la matrice della riflessione (ortogonale) rispetto a π.*

(c) *Esiste una rotazione di un angolo piatto (ampiezza π) attorno ad un opportuna retta che porti r su s? In caso affermativo si determini l'asse di rotazione e la matrice della rotazione nel riferimento canonico. In caso negativo si spieghi perché non può esistere. Si discuta lo stesso problema per due generiche rette sghembe.*

Svolgimento. (a) La retta r passa per $P = O + e_3$ ed è parallela al vettore e_1. La retta s passa per $Q = O + 4e_2 + e_3$ ed è parallela al vettore $w = e_1 + \sqrt{3}e_3$. La distanza tra le due rette è $d = \frac{|(Q-P)\cdot e_1 \times w}{\|e_1 \times w\|} = 4$ e l'angolo, ϑ, è determinato dalla condizione $\cos\vartheta = \frac{|e_1\cdot w|}{\|e_1\|\|w\|} = \frac{1}{2}$ ($\vartheta = \frac{\pi}{3}$). I punti di minima distanza sono proprio $P_0 = P$ e $Q_0 = Q$, per cui possiamo prendere $P_1 = P + e_1$ e $Q_1 = Q + \frac{1}{2}w$ ed il volume cercato è uguale a

$$\frac{1}{6}vol^3\,(P_1 - P_0, Q_0 - P_0, Q_1 - P_0) = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b) Le direzioni bisettrici tra r ed s sono in corrispondenza con i due sottospazi $\langle e_1 + \frac{1}{2}w\rangle$ e $\langle e_1 - \frac{1}{2}w\rangle$. Scegliamo la prima e consideriamo quindi il piano $\pi = P_0 + \langle Q_0 - P_0, e_1 + \frac{1}{2}w\rangle = P_0 + \langle e_2, \sqrt{3}e_1 + e_3\rangle$, di equazione $\pi : X - \sqrt{3}Z = -\sqrt{3}$ ($X + \sqrt{3}Z = \sqrt{3}$ nell'altro caso). La riflessione ha quindi matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

rispetto al riferimento canonico.

(c) Consideriamo la retta parallela alla direzione bisettrice tra r ed s e passante per il punto medio tra P_0 e Q_0, $M = \frac{P_0+Q_0}{2} = O + 2e_2 + e_3$. Ovvero la retta $M + \langle\sqrt{3}e_1 + e_3\rangle$. La rotazione di angolo π rispetto a questa retta ha matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 3/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t/2 \\ 4 \\ 1+\sqrt{3}t/2 \end{pmatrix}.$$

Ovvero, tutti i punti della retta r vengono mandati sui punti della retta s. La costruzione si può ripetere per due generiche rette sghembe, fissando opportunamente il sistema di riferimento (...come?). □