Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova di accertamento del 2 dicembre 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^6 + 7X^3 - 8$
(a) Trovare le radici di $P(X)$ *nel campo* $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi.*
(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ *in* $\mathbb{R}[X]$ *e in* $\mathbb{C}[X]$.

Svolgimento. (a) $t^2 + 7t - 8$ ha come radici 1 e -8. Dobbiamo trovare le radici cubiche di questi due numeri complessi, che sono ζ, $\bar\zeta$, 1, e -2, -2ζ, $-2\bar\zeta$, ove $\zeta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2\pi i/3}$.
(b) In $\mathbb{C}[X]$ si ha $P(X) = (X-1)(X-\zeta)(X-\bar\zeta)(X+2)(X+2\zeta)(X+2\bar\zeta)$.
In $\mathbb{R}[X]$ si ha $P(X) = (X-1)(X+2)(X^2+X+1)(X^2-2X+4)$. □

ESERCIZIO 2. *Sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ *una base dello spazio vettoriale* V *su* $\mathbb{Q}$. *Sia* $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, *ove* $u_1 = v_1 - v_3 + 2v_4$, $u_2 = 2v_1 - 3v_2 - 2v_3 - 2v_4$, $u_3 = -v_2 - 2v_4$, *e sia* W *il sottospazio di* V *definito dal sistema di equazioni omogenee* $\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - 3X_2 + 6X_3 - X_4 = 0 \\ 4X_1 + X_2 - 2X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U *e* W. *Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di* V *che si ottiene traslando tutti i vettori di* U *per il vettore* $u_0 = v_1 - v_2 - v_3$.
(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ *dell'endomorfismo* $\pi : V \to V$ *che si ottiene proiettando i vettori su* U *parallelamente a* W.
(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$ *definito ponendo* $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. *Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di* Φ. *Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di* V *e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per* $\ker\Phi$ *ed* $\mathrm{im}\,\Phi$.

Svolgimento. (a) I generatori di U sono linearmente dipendenti: $2u_1 - u_2 + 3u_3 = 0$. Quindi $\dim U = 2$ ed i vettori u_1, u_2 ne formano una base. Il sistema che definisce W ha rango 2, essendo $5I - 3II - 2III = 0$; il sottospazio ha quindi dimensione 2 ed una base è data dai vettori $w_1 = v_1 + 2v_4$, $w_2 = 2v_2 + v_3$. Equazioni cartesiane per il sottospazio U sono $\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_4 = 0 \\ 2X_2 - 2X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$ da cui si vede che u_0 appartiene ad U e quindi il sottospazio non varia traslando per u_0.
(b) La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Un omomorfismo, $\phi : V \to V$, appartiene a $\ker\Phi$ se, e solo se, $\phi(U) \subseteq U$ e $\phi(W) \subseteq W$. Dunque $\ker\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U,U) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,W)$ è un sottospazio di dimensione 8. I vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono una base, $\mathcal{U}$, di $V = U \oplus W$ e gli omomorfismi $\lambda_{i,j}$, $\lambda'_{i,j}$, per $1 \le i, j \le 2$, definiti da

$$\lambda_{i,j}(u_j) = u_i \ \text{ e } \ \lambda_{i,j}(x) = 0 \ \text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$
$$\lambda'_{i,j}(w_j) = w_i \ \text{ e } \ \lambda'_{i,j}(x) = 0 \ \text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$

sono una base di $\ker\Phi$.

Un omomorfismo, $\phi : V \to V$, appartiene a $\mathrm{im}\,\Phi$ se, e solo se, $\phi(U) \subseteq W$ e $\phi(W) \subseteq U$. Dunque $\mathrm{im}\,\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U,W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,U)$ si conferma essere un sottospazio di dimensione 8 di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$. Gli omomorfismi $\nu_{i,j}$, $\nu'_{i,j}$, per $1 \le i, j \le 2$, definiti da

$$\nu_{i,j}(u_j) = w_i \ \text{ e } \ \nu_{i,j}(x) = 0 \ \text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$
$$\nu'_{i,j}(w_j) = u_i \ \text{ e } \ \nu'_{i,j}(x) = 0 \ \text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$

sono una base di $\operatorname{im}\Phi$.

Φ non è una proiezione[(†)], perché non induce l'identità su $\operatorname{im}\Phi$ (ad es. $\Phi(\nu_{i,j}) = -\nu_{i,j}$).

Le matrici nella base $\mathcal{U}$ degli omomorfismi che formano le basi date, costituiscono la base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$. Infatti, si ha: $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\lambda_{i,j}) = \varepsilon(i,j)$, $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\lambda'_{i,j}) = \varepsilon(i+2,j+2)$, $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\nu_{i,j}) = \varepsilon(i+2,j)$, $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\nu'_{i,j}) = \varepsilon(i,j+2)$, per $1 \leq i,j \leq 2$. □

ESERCIZIO 3. *Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 12 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -10 & -7 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \\ -1 & 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$, $\ker\psi$, $\operatorname{im}\psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.
(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.
(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

Svolgimento. (a) Si ha

$$\ker\phi = \ker\psi = \langle 2v_1 - v_2 + v_3 - 2v_4, v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \rangle,$$
$$\operatorname{im}\phi = \langle v_1 + 3v_2 - v_4, 2v_1 - v_3 + 2v_4 \rangle, \qquad \operatorname{im}\psi = \langle w_1 - w_3, 2w_2 + w_3 \rangle.$$

Le equazioni cartesiane sono

$$\ker\phi : \begin{cases} X_1 + 2X_2 - 2X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}\phi : \begin{cases} 3X_1 - X_2 + 6X_3 = 0 \\ 3X_1 - 2X_2 - 3X_4 = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}\psi : 2Y_1 - Y_2 + 2Y_3 = 0.$$

(b) I vettori $\psi(v_1) = w_1 - w_3$, $\psi(v_2) = 2w_2 + w_3$ sono linearmente indipendenti e possiamo aggiungere a questi w_3 per ottenere una base, $\mathcal{U}$, di W. Le applicazioni cercate[(†)] sono tutte e sole le applicazioni lineari, ξ, per cui $\xi(\psi(v_1)) = \phi(v_1)$, $\xi(\psi(v_2)) = \phi(v_2)$, mentre $\xi(w_3)$ può essere assegnato ad arbitrio. Si ha quindi

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \\ 0 & -1 & c \\ -1 & 2 & d \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi) = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\xi)\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} (2,-1,2),$$

al variare di (a,b,c,d) in $\mathbb{R}^4$.

(c) I vettori $\phi(v_1) = v_1 + 3v_2 - v_4$, $\phi(v_2) = 2v_1 - v_3 + 2v_4$ sono linearmente indipendenti e possiamo aggiungere a questi v_3, v_4 per ottenere una base, $\mathcal{T}$, di V. Le applicazioni cercate sono tutte e sole le

(†) È $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$ ad essere una proiezione...

(†) Una condizione necessaria per l'esistenza di ξ è $\ker\psi \subseteq \ker\phi$ (perché?). Nel caso in questione i due nuclei coincidono e quindi possiamo procedere a determinare le applicazioni cercate.

applicazioni lineari, η, per cui $\eta(\phi(v_1)) = \psi(v_1)$, $\eta(\phi(v_2)) = \psi(v_2)$, mentre $\eta(v_3)$ ed $\eta(v_4)$ possono essere assegnati ad arbitrio. Si ha quindi

$$\alpha_{\mathcal{T},\mathcal{W}}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & d \\ 0 & 2 & b & e \\ -1 & 1 & c & f \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{T}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta) = \alpha_{\mathcal{T},\mathcal{W}}(\eta)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{T}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

al variare di (a, b, c, d, e, f) in $\mathbb{R}^6$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 2 dicembre 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^6 + 9X^3 + 8$

(a) Trovare le radici di $P(X)$ nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, ove $u_1 = v_1 - v_2 - 2v_3$, $u_2 = 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 + 3v_4$, $u_3 = 2v_3 + v_4$, e sia W il sottospazio di V definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ 6X_1 + 2X_2 - X_3 - 3X_4 = 0 \\ 2X_1 - 4X_2 + 2X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 - v_2 + v_4$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di Φ. Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di V e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per $\ker \Phi$ ed $\mathrm{im}\, \Phi$.

ESERCIZIO 3. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 12 \\ 2 & -7 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker \phi$, $\mathrm{im}\, \phi$, $\ker \psi$, $\mathrm{im}\, \psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 2 dicembre 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

C

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^6 - 7X^3 - 8$
(a) Trovare le radici di $P(X)$ nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.
(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, ove $u_1 = 2v_2 + v_3 - v_4$, $u_2 = 3v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 2v_4$, $u_3 = -v_1 - 2v_2$, e sia W il sottospazio di V definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 - 2X_4 = 0 \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 - 6X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + 4X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 - v_3 + v_4$.
(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.
(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di Φ. Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di V e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per $\ker\Phi$ ed $\mathrm{im}\,\Phi$.

ESERCIZIO 3. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -10 & -1 & -7 & 2 \\ 12 & 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -5 & 1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker\phi$, $\mathrm{im}\,\phi$, $\ker\psi$, $\mathrm{im}\,\psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.
(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.
(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 2 dicembre 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

D

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^6 - 9X^3 + 8$

(a) Trovare le radici di $P(X)$ nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, ove $u_1 = -v_1 + 2v_2 + v_4$, $u_2 = 2v_1 + 2v_2 + 3v_3 - 2v_4$, $u_3 = 2v_2 + v_3$, e sia W il sottospazio di V definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ 6X_1 - X_2 - 3X_3 + 2X_4 = 0 \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 - 4X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 + v_3 - v_4$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di Φ. Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di V e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per $\ker \Phi$ ed $\mathrm{im}\, \Phi$.

ESERCIZIO 3. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -7 & -10 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -7 & -1 & 1 \\ -4 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker \phi$, $\mathrm{im}\, \phi$, $\ker \psi$, $\mathrm{im}\, \psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3