Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 3 febbraio 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $n \geq 1$ un numero intero e si consideri la matrice*

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} a\varepsilon(j,j) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} b\varepsilon(\left[\tfrac{n+1}{2}\right] + 1 - j, j) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} c\varepsilon(n+1-j, \left[\tfrac{n}{2}\right] + j),$$

ove a, b, c sono numeri reali e, come di consueto, $[t]$ indica la parte intera del numero t (ovvero il più grande numero intero minore o uguale a t).

(a) Si scrivano esplicitamente le matrici K_1, K_2, K_3, K_4 e se ne calcolino i rispettivi determinanti.

(b) Si calcolino i determinanti di K_5 e K_6.

(c) Si determini una formula ricorsiva per il determinante $\delta_n = \det K_n$. È vero che per $n \geq 2$ ciascuno dei δ_n è funzione polinomiale di δ_2, δ_3, δ_4? In caso affermativo si dia un'espressione esplicita per tali funzioni, altrimenti si dia un controesempio.

Svolgimento. (a) Si ha

$$K_1 = (a+b+c), \qquad K_2 = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}, \qquad K_4 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix};$$

e quindi $\delta_1 = a+b+c$, $\delta_2 = (a+b)(a+c)$, $\delta_3 = a(a^2-b^2-c^2)$, $\delta_4 = (a^2-b^2)(a^2-c^2)$.

(b) Si ha

$$\delta_5 = \det\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a+c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix} = \delta_2\delta_3 \qquad \text{e} \qquad \delta_6 = \det\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix} = \delta_2\delta_4.$$

Nel primo caso, lo si può vedere scambiando tra loro le prime due righe e le prime due colonne e poi portando la quarta riga al secondo posto e la quarta colonna al secondo posto. Nel secondo, scambiando tra loro le prime due righe e le prime due colonne e poi portando la quinta riga al secondo posto e la quinta colonna al secondo posto.

(c) Operando in modo analogo sulle righe e le colonne (scriverlo in modo esplicito!), si può affermare che, per $n \geq 5$, si ha

$$\delta_n = \begin{cases} \delta_2\delta_{n-2} & \text{se } n \equiv 1,2 \mod 4 \\ \delta_4\delta_{n-4} & \text{se } n \equiv 3,4 \mod 4 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \delta_n = \begin{cases} \delta_2\delta_3\delta_{n-5} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \delta_i\delta_{n-i} & \text{se } i \in \{2,3,4\} \text{ e } n \equiv i \mod 4 \end{cases}.$$

Si può quindi dimostrare (ad esempio, per induzione su n) che

$$\delta_n = \delta_2^{1-\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n-1}{4}\right]}\delta_3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_4^{\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n-1}{4}\right]-1}$$

per $n \geq 2$. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi $U = \langle 2v_1 + v_2 + 4v_3 - 2v_4 + v_5, v_1 + 2v_3, v_1 - v_2 + 2v_3 + 2v_4 - v_5\rangle$ e*

$$W : \begin{cases} 2X_1 - X_2 - 2X_3 + 4X_5 = 0 \\ X_1 - X_3 + 2X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + 2X_5 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni e delle basi di U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$ e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che proietta ogni vettore su U, parallelamente a W.*

(b) *Sia $H = \langle 2v_1 + 3v_3 + v_4, 2v_1 + v_2 - v_4\rangle$ e si determinino nucleo ed immagine di $\pi_{|H}$. Si determinino i sottospazi $U^\perp$, $W^\perp$, $H^\perp$ di V^* e si esibisca una base per ciascuno di questi sottospazi. Si dica se $V^* = H^\perp \oplus W^\perp$.*

(c) *È vero che $H = \{\, u + \phi(u) \mid u \in U \,\}$ per un opportuno omomorfismo $\phi : U \to W$? In caso affermativo si scriva la matrice di ϕ nelle basi di U e W fissate al punto (a). È vero che $H^\perp = \left\{\, u^* + \psi(u^*) \;\middle|\; u^* \in U^\perp \,\right\}$ per un opportuno omomorfismo $\psi : U^\perp \to W^\perp$? Che relazioni ci sono tra ψ e ϕ^*?*

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente dipendenti ed una sua base, $\mathcal{U}$, è data da $u_1 = v_1 + 2v_3$, $u_2 = v_2 - 2v_4 + v_5$. Anche le tre equazioni che definiscono W sono dipendenti ($III = 3II - I$) e tre soluzioni indipendenti del sistema formano la base $\mathcal{W}$, con $w_1 = v_1 + v_3$, $w_2 = v_4$, $w_3 = 2v_1 - v_5$.

La matrice cercata è $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\ker(\pi_{|H}) = \ker\pi \cap H = W \cap H = \langle 0\rangle$, come si verifica sostituendo una combinazione lineare dei generatori di H nelle equazioni che definiscono W. Quindi $\dim(\mathrm{im}(\pi_{|H})) = \dim H - \dim\ker(\pi_{|H}) = 2 = \dim U$ e quindi $\mathrm{im}(\pi_{|H}) = U$. Ciò significa che π induce un isomorfismo tra H ed U.

Sia $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ la base duale di V^*. Una base di $U^\perp$ è $\{2v_1^* - v_3^*, 2v_2^* + v_4^*, v_4^* + 2v_5^*\}$. Una base di $W^\perp$ è $\{v_1^* - v_3^* + 2v_5^*, v_2^*\}$. Una base di $H^\perp$ è $\{3v_1^* - 6v_2^* - 2v_3^*, 3v_2^* - v_3^* + 3v_4^*, v_5^*\}$. Infine, $H^\perp + W^\perp = (H \cap W)^\perp = V^*$, per quanto visto sopra. Applicando le relazioni di Grassmann si conclude che $V^* = H^\perp \oplus W^\perp$.

(c) La proiezione, π, induce un isomorfismo tra H ed U e quindi, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $\phi(u) \in W$ tale che $u + \phi(u) \in H$ e questo definisce l'omomorfismo $\phi : U \to W$ ($\phi = (\mathrm{id} - \pi) \circ (\pi_{|H})^{-1}$).

Si ha $u_1 + w_1 + w_2 \in H$ e $u_2 + w_2 + w_3 \in H$, quindi $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Poiché $V^* = H^\perp \oplus W^\perp$, la proiezione $\mathrm{id} - \pi^*$ induce un isomorfismo tra $U^\perp$ ed $H^\perp$; quindi, analogamente a quanto visto sopra, vi è un unico omomorfismo $\psi : U^\perp \to W^\perp$ tale che $H^\perp = \left\{\, u^* + \psi(u^*) \;\middle|\; u^* \in U^\perp \,\right\}$.

Infine, dal fatto che $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$, si deduce che $U^\perp \cong V^*/W^\perp \cong W^*$ (esplicitare gli isomorfismi!) e, analogamente, $W^\perp \cong V^*/U^\perp \cong U^*$. Inoltre, per ogni $u \in U$ ed ogni $u^* \in U^\perp$, si ha $u + \phi(u) \in H$ e $u^* + \psi(u^*) \in H^\perp$, e quindi

$$0 = (u + \phi(u)) \circ (u^* + \psi(u^*)) = \phi(u) \circ u^* + u \circ \psi(u^*)$$

da cui si deduce che $\psi = -\phi^*$. □