Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 febbraio 2012

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 + X^2 + 3X - 5$.

(a) *Si verifichi che* $P(1) = 0$*; si determinino le radici in* $\mathbb{C}$ *del polinomio* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino le fattorizzazioni in fattori irriducibili di* $P(X)$ *in* $\mathbb{R}[X]$ *ed in* $\mathbb{C}[X]$.

Svolgimento. $P(X) = (X-1)(X^2+2X+5) = (X-1)(X+1+2i)(X+1-2i)$ e lasciamo al lettore il disegno. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si considerino i vettori* $v = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ *e* $w = \begin{pmatrix} 2i+1 \\ i-2 \end{pmatrix}$ *di* $\mathbb{C}^2$.

(a) *Si determinino le dimensioni sui rispettivi campi di base, dei sottospazi* $\langle v, w \rangle_{\mathbb{C}}$ *e* $\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}}$.

(b) *Si dica se esiste un endomorfismo di* $\mathbb{C}$*–spazi vettoriali,* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$*, tale che* $\phi(v) = v$ *e* $\phi(w) = -w$*. In caso affermativo se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica* $\{e_1, e_2\}$*. Si dica se esiste un endomorfismo di* $\mathbb{R}$*–spazi vettoriali,* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$*, tale che* $\phi(v) = v$ *e* $\phi(w) = -w$ *e* $\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$*. In caso affermativo se ne scriva la matrice rispetto alla base* $\mathcal{R} = \{e_1, ie_1, e_2, ie_2\}$.

(c) *Nel caso in cui esista l'endomorfismo* ϕ *del punto precedente, si consideri l'endomorfismo* $\alpha_t = 3\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2} - t\phi$*; si calcoli* $\det \alpha_t$ *e si determini una base di* $\ker\alpha_t$*, al variare di* t *in* $\mathbb{C}$ *o in* $\mathbb{R}$ *(a seconda del caso).*

Svolgimento. (a) $w = iv$ e quindi $\langle v, w \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v \rangle_{\mathbb{C}}$ ha dimensione 1 come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. I due vettori sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ e quindi $\dim_{\mathbb{R}} \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}} = 2$.

(b) Poiché $w = iv$ non può esistere un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare che soddisfi alle condizioni dette. I quattro vettori

$$v_1 = v = 2e_1 - ie_1 + e_2 + 2ie_2, \quad v_2 = w = e_1 + 2ie_1 - 2e_2 + ie_2, \quad v_3 = e_2 - ie_2, \quad v_4 = e_2 + ie_2,$$

sono una base, $\mathcal{V}$, di $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale reale e quindi esiste un'unica applicazione lineare ϕ soddisfacente alle condizioni date, e si ha

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{R}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

da cui si conclude che $A = \alpha_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(\phi) = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 3/5 & -4/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Il determinante di α_t è facile da calcolare utilizzando la base $\mathcal{V}$ ed è uguale a $9(9-t^2)$. Si ha $\ker\alpha_3 = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$, $\ker\alpha_{-3} = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$, e $\ker\alpha_t = \langle 0 \rangle_{\mathbb{R}}$, per tutti gli altri valori di $t \in \mathbb{R}$. $\square$

ESERCIZIO 3. *Sia n un numero naturale fissato e si consideri l'applicazione $\phi_n : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, definita da $\phi(A) = -{}^tA$.*

(a) Si verifichi che, per ogni numero naturale $n \geq 1$, ϕ_n è un'applicazione lineare ed una simmetria dello spazio $M_n(\mathbb{R})$. Si determinino, al variare di n, il sottospazio unito ed il sottospazio delle direzioni di riflessione per ϕ_n e le loro dimensioni.

(b) Si calcoli $\det \phi_n$ al variare di n.

(c) Si identifichi lo spazio $M_n(\mathbb{R})$ con il suo duale tramite l'applicazione bilineare $g : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g(X,Y) = \operatorname{tr}({}^tXY)$, e si verifichi che tramite tale identificazione la base canonica $\{\varepsilon(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ di $M_n(\mathbb{R})$ coincide con la base duale. Che dire della trasposta di ϕ_n?

Svolgimento. (a) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ e ${}^t(cA) = c\,{}^tA$ per ogni scalare reale c. Quindi la trasposizione è un'applicazione lineare, così come lo è la moltiplicazione per lo scalare -1. Quindi ϕ_n è lineare in quanto composizione di applicazioni lineari. Inoltre $\phi_n(\phi_n(A)) = -{}^t(-{}^tA) = A$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ e quindi ϕ_n è una simmetria. $\phi_n(A) = A$ se, e solo se, ${}^tA = -A$ e quindi gli elementi uniti per ϕ_n formano il sottospazio, A_n, delle matrici antisimmetriche, di dimensione $\binom{n}{2}$. Una sua base è data dalle matrici $\varepsilon(i,j) - \varepsilon(j,i)$ per $1 \leq i < j \leq n$. Le direzioni di riflessione sono le matrici, X, per cui $\phi_n(X) = -X$, ovvero le matrici simmetriche che formano uno sottospazio, S_n, di dimensione $\binom{n+1}{2}$. Una sua base è data dalle matrici $\varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i)$ per $1 \leq i \leq j \leq n$.

(b) $M_n(\mathbb{R}) = A_n \oplus S_n$ e quindi esiste una base fatta con vettori dei due sottospazi. Utilizzando tale base si calcola facilmente $\det \phi_n = (-1)^{\binom{n+1}{2}}$ per ogni intero $n \geq 1$.

(c) Per i vettori della base canonica, si ha

$$\operatorname{tr}({}^t\varepsilon(i,j)\varepsilon(h,k)) = \operatorname{tr}(\varepsilon(j,i)\varepsilon(h,k)) = \operatorname{tr}(\delta_{ih}\varepsilon(j,k)) = \delta_{ih}\delta_{jk}$$

da cui si conclude. Date due matrici, A e B, in $M_n(\mathbb{R})$, si ha

$$g(\phi_n(A), B) = -\operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}{}^t(AB) = -\operatorname{tr}({}^tB{}^tA) = -\operatorname{tr}({}^tA{}^tB) = g(A, \phi_n(B))$$

e quindi ϕ_n coincide con la sua trasposta. $\square$