Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 28 febbraio 2012

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 - 11X + 20$.

(a) *Si verifichi che* $P(-4) = 0$*; si determinino le radici in* $\mathbb{C}$ *del polinomio* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino le fattorizzazioni in fattori irriducibili di* $P(X)$ *in* $\mathbb{R}[X]$ *ed in* $\mathbb{C}[X]$.

Svolgimento. $P(X) = (X+4)(X^2-4X+5) = (X+4)(X-2+i)(X-2-i)$ e lasciamo al lettore il disegno. □

ESERCIZIO 2. *Sia* V *uno spazio vettoriale complesso e sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ *una sua base.*

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare* $\phi : V \to V$ *soddisfacente alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1+2v_2) = 2v_3+4v_4, \quad \phi(2v_3+4v_4) = v_1+2v_2, \quad \phi(v_1-4v_4) = 2v_3-2v_2,$$
$$\phi(2v_3-2v_2) = v_1-4v_4, \quad \phi(v_1) = v_1.$$

In caso positivo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ *e si dica se* $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$*. In caso negativo, si dica come modificare l'immagine di* $v_1 + v_2$ *affinché oltre alle condizioni date, si abbia* $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$*.*

(b) *Si determini la decomposizione* $V = U \oplus W$ *ove* U *è il sottospazio lasciato invariante da* ϕ *(asse di simmetria) e* W *è il sottospazio delle direzioni di simmetria per* ϕ*.*

(c) *Sia* T *uno spazio vettoriale di dimensione* n *su* $\mathbb{C}$ *e si consideri l'applicazione* $\Phi : Hom_{\mathbb{C}}(T,V) \to Hom_{\mathbb{C}}(T,V)$ *definita da* $\Phi(\xi) = \phi \circ \xi$*. Si mostri che* Φ *è una simmetria dello spazio* $Hom_{\mathbb{C}}(T,V)$ *e si determinino la decomposizione in somma diretta ad essa associata (direzioni unite e direzioni di simmetria) e le dimensioni dei relativi sottospazi. Si calcoli* $\det(2\mathrm{id} - \Phi)$.

Svolgimento. (a) I vettori

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_1+2v_2, \quad w_3 = 2v_3+4v_4, \quad w_4 = v_1-4v_4,$$

sono linearmente indipendenti e formano quindi una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, di V. Si possono quindi assegnare le immagini dei vettori della base secondo quanto scritto sopra ed ottenere un'applicazione lineare, $\phi : V \to V$. Essendo, $2v_3 - 2v_2 = -w_2 + w_3 + w_4$, si ottiene $\phi(2v_3 - 2v_2) = \phi(-w_2 + w_3 + w_4) = -(2v_3+4v_4)+(v_1+2v_2)+(2v_3-2v_2) = v_1 - 4v_4$ e sono soddisfatte tutte le condizioni richieste. Si ha quindi

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\ 0&2&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&4&-4 \end{pmatrix}, \quad B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1&-1/2&-1/2&1/4\\ 0&1/2&0&0\\ 0&0&1/2&0\\ 0&0&1/2&-1/4 \end{pmatrix},$$
$$A = PBP^{-1} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1&-1/2&0&1/4\\ 0&0&0&1/2\\ 0&1&1&-1/2\\ 0&2&0&0 \end{pmatrix}.$$

$A^2 = B^2 = \mathbf{1}_4$ e quindi ϕ è una simmetria.

(b) $U = \langle v_i + \phi(v_i) \mid i = 1, \dots, 4 \rangle = \langle v_1, v_1 - 2v_2 - 2v_3 - 4v_4, v_3, v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 4v_4 \rangle = \langle v_1, v_3, v_2 + 2v_4 \rangle$ e $W = \langle v_i - \phi(v_i) \mid i = 1, \dots, 4 \rangle = \langle v_1 + 2v_2 - 2v_3 - 4v_4 \rangle$.

(c) Per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,V)$, si ha $\Phi(\Phi(\xi)) = \phi \circ (\phi \circ \xi) = \xi$ e quindi $\Phi^2 = \mathrm{id}$ e Φ è una simmetria di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,V)$. Essendo $V = U \oplus W$, si ha $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,U) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,W)$ (esplicitare l'isomorfismo!) e il sottospazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,U)$, di dimensione $3n$, è il sottospazio delle direzioni unite, mentre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,W)$, di dimensione n, è il sottospazio delle direzioni di simmetria. Infine, se ξ è una direzione unita, si ha $(2\mathrm{id} - \Phi)(\xi) = \xi$; mentre, se η è una direzione di simmetria, si ha $(2\mathrm{id} - \Phi)(\eta) = 3\eta$. Quindi, prendendo una base fatta di direzioni unite e di direzioni di simmetria per Φ, si calcola facilmente $\det(2\mathrm{id} - \Phi) = 3^n$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4&2&-6&-2&6\\ 2&1&-3&-1&3\\ -6&-3&9&3&-9\\ 0&0&0&0&0\\ 4&2&-6&-2&6 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}).$$

(a) *Si determini il rango di A e si determinino, se esistono, una matrice colonna $c \in M_{5\times 1}(\mathbb{Q})$ ed una matrice riga $r \in M_{1\times 5}(\mathbb{Q})$, tali che $A = cr$. È vero che, per ogni intero $n \geq 2$, qualsiasi matrice di rango 1 in $M_n(\mathbb{Q})$ è prodotto di una colonna per una riga? La colonna e la riga in questione, se esistono, sono univocamente determinate?*

(b) *Sia $n \geq 2$ e siano $A_1 = c_1 r_1$ ed $A_2 = c_2 r_2$ due matrici in $M_n(\mathbb{Q})$, prodotto di una colonna $0 \neq c_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$ e di una riga $0 \neq r_i \in M_{1\times n}(\mathbb{Q})$, $(i = 1, 2)$. Si descrivano nucleo ed immagine di A_1, A_2 ed $A_1 + A_2$ in relazione alle dimensioni dei sottospazi $\langle c_1, c_2\rangle$ e $\langle r_1, r_2\rangle$.*

(c) *Sia*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}).$$

Si determini $r = \mathrm{rk} B$. Si determinino, se esistono, r matrici di rango 1, $B_1, \dots, B_r$ tali che $B = B_1 + \cdots + B_r$. Le matrici in questione, se esistono, sono univocamente determinate (a meno dell'ordine)? Se non sono uniche, come possono variare?

Svolgimento. (a) La matrice A ha rango 1, come si può vedere facilmente applicando il procedimento di eliminazione di Gauss alle colonne. Posto $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $r = (2, 1, -3, -1, 3)$, si verifica con un calcolo diretto che $A = cr$.

Più in generale, se una matrice $A \in M_n(\mathbb{Q})$ ha rango 1, tutte le sue colonne $a_1, \dots, a_n$ sono multipli di una di queste, ovvero esiste una colonna $a \neq 0$ di A e degli scalari, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tali che $a_i = \alpha_i a$, per $i = 1, \dots, n$. Indicata con b la riga $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, si ha quindi $A = ab$. La colonna a è determinata a meno del prodotto per uno scalare $\rho \neq 0$ e, posto $a' = \rho a$, si ha $A = a'b'$ con $b' = (\rho^{-1} b)$.

(b) Poiché le righe e le colonne non possono essere nulle, entrambe le matrici A_1 ed A_2 hanno rango esattamente uguale ad 1 e $\mathrm{im}\, A_i = \langle c_i\rangle$, $\ker A_i = \langle r_i\rangle^\perp$, ove $\mathbb{Q}^n = M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}^{n*} = M_{1\times n}(\mathbb{Q})$.

Se $\dim\langle c_1, c_2\rangle = 2 = \dim\langle r_1, r_2\rangle$, dato un vettore $x \in \mathbb{Q}^n$, si ha $(A_1 + A_2)x = c_1(r_1 \circ x) + c_2(r_2 \circ x)$ (col tondino indichiamo la dualità canonica, ovvero il prodotto riga per colonna) e quindi $\mathrm{im}\,(A_1 + A_2) \subseteq \langle c_1, c_2\rangle$ ed i due sottospazi sono uguali perché, essendo r_1 ed r_2 linearmente indipendenti in $\mathbb{Q}^{n*}$, esistono vettori x_1, x_2 in $\mathbb{Q}^n$, tali che $r_1 \circ x_1 = 1 = r_2 \circ x_2$ e $r_1 \circ x_2 = 0 = r_2 \circ x_1$ (perché?). D'altro canto, essendo c_1 e c_2 linearmente indipendenti in $\mathbb{Q}^n$, un vettore x appartiene al nucleo di $A_1 + A_2$ se, e solo se, $r_1 \circ x = 0 = r_2 \circ x$. Dunque, $\ker(A_1 + A_2) = \langle r_1, r_2\rangle^\perp$.

Se, invece $\dim\langle c_1, c_2\rangle = 1$ e $c_1 = \alpha_1 c$, $c_2 = \alpha_2 c$ per un vettore $c \in \mathbb{Q}^n$ ed α_1, α_2 in $\mathbb{Q}$, allora $\mathrm{im}\,(A_1 + A_2) = \langle c\rangle$ e $\ker(A_1 + A_2) = \langle \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2\rangle^\perp$. Analogamente, se $r_1 = \alpha_1 r$, $r_2 = \alpha_2 r$, per un vettore $r \in \mathbb{Q}^{n*}$ ed α_1, α_2 in $\mathbb{Q}$, allora $\mathrm{im}\,(A_1 + A_2) = \langle \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2\rangle$ e $\ker(A_1 + A_2) = \langle r\rangle^\perp$.

(c) Applicando la tecnica di eliminazione alle righe o alle colonne di B, si verifica facilmente che $\mathrm{rk} B = 2$. In particolare, se consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ha che v_3, v_4, v_5 sono una base del nucleo di B ed i vettori v_1 e v_2 li completano ad una base di $\mathbb{Q}^5$. Infine, i vettori

$$w_1 = Bv_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = Bv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono una base dell'immagine di B. Se consideriamo la base duale $v_1^*, \dots, v_5^*$ di $\mathbb{Q}^{5*}$, ovvero,

$$v_1^* = (1, 0, 1, 1, 1), \quad v_2^* = (0, 1, 1, -1, -3), \quad v_3^* = (0, 0, 1, 0, 0), \quad v_4^* = (0, 0, 0, 1, 0), \quad v_5^* = (0, 0, 0, 0, 1),$$

si ha $B = w_1 v_1^* + w_2 v_2^*$ [(†)], prodotto di colonne per righe.

Possiamo modificare la scelta della base $\mathcal{V}$, prendendo come v_1, v_2 una qualsiasi altra coppia di generatori di un complementare del nucleo di B. In corrispondenza a questa coppia, sono univocamente determinati i vettori $w_1 = Bv_1$ e $w_2 = Bv_2$ ed i vettori v_1^*, v_2^*, ortogonali al nucleo di B, e tali che $v_i^* \circ v_j = \delta_{ij}$ per $1 \leq i, j \leq 2$. □

[(†)] Detta $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'applicazione lineare di matrice B rispetto alla base canonica, nelle notazioni del sesto foglio di esercizi, si potrebbe scrivere $\phi = w_1 \otimes v_1^* + w_2 \otimes v_2^* = \phi(v_1) \otimes v_1^* + \phi(v_2) \otimes v_2^*$.