Esercizio 1. Calcolare z^{-1}, w^{-1}, zw, zw^{-1}, $z^{-1}w$, z^2, z^3, z^4, le radici quadrate di z e le radici cubiche di z per le seguenti coppie di numeri:

(a) $z = 1 - i$, $w = 2 + i$;

(b) $z = 1 + i$, $w = 1 - 2i$;

(c) $z = 3e^{i\pi/3}$, $w = 2e^{i\pi/4}$

(d) $z = \cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}$, $w = -i$

(e) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $w = \pm 2i$

Esercizio 2. Verificare le seguenti relazioni:

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \qquad (1-2i)^4 = (2+i)^4, \qquad z + \bar{z} = 2\Re z, \qquad i\bar{z} - iz = 2\Im z, \qquad \frac{z}{\bar{z}} = e^{2i\operatorname{Arg} z}.$$

Esercizio 3. Si studino le proprietà di iniettività, suriettività, eventuali inverse destre e sinistre per le seguenti funzioni $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

(a) $f_1(z) = z^2 + i$;

(b) $f_2(z) = (z + i)^2$;

(c) $f_3(z) = z - \bar{z}$;

(d) $f_4(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$, $f_4(0) = 0$.

(e) $f_5(z) = z/\bar{z}$ se $z \neq 0$, $f_5(0) = 0$.

Per ogni $w \in \mathbb{C}$, si determini la sua controimmagine per ciascuna delle funzioni date.

Esercizio 4. Si determinino gli elementi degli insiemi

$$A = \left\{\, z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^3 - i = 0 \,\right\}, \qquad B = \left\{\, z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^3 + 1 = 0 \,\right\},$$

(a) Si disegnino sul piano di Gauss gli insiemi A, B e $C = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0 < \Im z \,\}$.

(b) Siano $\{\zeta_1\} = A \cap C$ e $\{\zeta_2\} = B \cap C$. È vero che $(\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_2)$ è un numero reale e $\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}$ è un numero immaginario? (calcolarli)

(c) Nel piano di Gauss, si disegni il parallelogramma di vertici 0, ζ_1, ζ_2, $\zeta_1 + \zeta_2$.

(d) Si dia una condizione necessaria e sufficiente sui numeri complessi $z_1 \neq z_2$, affinché $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ sia un numero immaginario.

Esercizio 5. Si consideri il polinomio $P(X) = X^2 - 2iX - 5 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino i numeri complessi, z_1 e z_2, tali che $P(z_1) = 0 = P(z_2)$, sapendo che $\Re z_1 \geq \Re z_2$.

(b) Si disegni nel piano di Gauss l'insieme, D_2, formato dai punti, $z \in \mathbb{C}$, la cui distanza da z_1 è maggiore del doppio della distanza da z_2.

(c) Al variare di α tra i numeri reali positivi, si determini l'insieme D_α, formato dai punti, z, la cui distanza da z_1 è maggiore di α volte la distanza di z da z_2. È vero che, per ogni α, l'insieme D_α è delimitato da una circonferenza del piano di Gauss? Che dire di raggio e centro di queste circonferenze?

Esercizio 6. Si consideri l'insieme $\{z^n | n \in \mathbb{N}\}$ per un fissato $z \in \mathbb{C}$; trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché:

(a) l'insieme sia finito;

(b) l'insieme ammetta una infinità di elementi tra loro allineati;

(c) l'insieme sia tutto contenuto nel cerchio unitario;

(d) l'insieme sia tutto esterno al cerchio unitario.

Esercizio 7. Definiamo $\mathbb{S}^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$ (circolo unitario o circonferenza unitaria) e $R(1) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \text{ per qualche } n \in \mathbb{N} \,\}$ (radici dell'unità). Mostrare che $R(1) \subseteq \mathbb{S}^1$ e che l'inclusione è stretta. Come si caratterizzano gli elementi di $R(1)$ in termini dell'argomento? Sia ζ una soluzione dell'equazione $X^k - 1 = 0$. Si mostri che $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{k-1} = 0$.

Esercizio 8. Scrivere (e disegnare sul piano di Gauss) le radici n-esime di $-i$, $1 + i$, $3 - 4i$ per $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 9. Determinare $\cos(5t)$, $\cos(8t)$, $\sin(6t)$, $\sin(9t)$ in termini delle funzioni trigonometriche di argomento t (e loro potenze).

Esercizio 10. Dare l'interpretazione geometrica nel piano di Gauss della inversione dei numeri complessi: se $z = \varrho e^{i\theta}$ allora $z^{-1} = \varrho^{-1} e^{-i\theta}$.

Esercizio 11. Sia $w = 1 + i\sqrt{3}$. Determinare $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $0, w, z_1, z_2$ formino un quadrato nel piano di Gauss e $\Re(z_1) < 0$. Mostrare che $(w + z_2)(w - z_2) = 2w^2$ e $2wz_2 = z_1^2$.

Esercizio 12. Se $|z| = 1$, è vero che le radici n esime di z si ottengono ruotando opportunamente (e di quanto?) le radici n-esime dell'unità?

Esercizio 13. Mostrare che la funzione $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ che manda (ξ, ϱ) nel prodotto $\xi\varrho$ è una biiezione. Scrivere la funzione inversa.

Esercizio 14. Si determinino le soluzioni dell'equazione $z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$.

(a) Si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione.

(b) Si determino $\alpha \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che la retta $r : \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ passi per z_1 e z_2.

(c) Si determinino centro e raggio della circonferenza del piano di Gauss che si ottiene per riflessione della retta r rispetto alla circonferenza unitaria ($|z| = 1$).

Esercizio 15. Siano z_1, z_2, z_3, le radici cubiche del numero complesso $-8i$.

(a) Si scrivano in forma algebrica z_1, z_2, z_3 e si disegni nel piano di Gauss il triangolo avente i tre punti come vertici.

(b) Si determinino, nelle coordinate z e $\bar{z}$, le equazioni delle rette che formano i lati del triangolo avente come vertici z_1, z_2, z_3.

(c) Si determinino e si disegnino i cerchi che si ottengono riflettendo nella circonferenza unitaria i lati del triangolo $z_1z_2z_3$. Si disegni, in particolare, il triangolo che ha come vertici i centri di tali circonferenze.

Esercizio 16 (Formula di Cardano). Si consideri l'equazione generale di terzo grado, della forma $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$, con $a \neq 0$.

(a) Si verifichi che, posto $X = Y - \frac{b}{3a}$, si ottiene $aX^3 + bX^2 + cX + d = a(Y^3 + pY + q)$, con $p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$ e $q = \frac{27a^2d+2b^2-9abc}{27a^3}$.

(b) Si mostri che la *sostituzione di Viète*, $Y = W - \frac{p}{3W}$, porta l'equazione $Y^3 + pY + q = 0$ nella forma $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$. Infine, la moltiplicazione per W^3 e la posizione $W^3 = T$, riporta il problema alla risoluzione dell'equazione di secondo grado $T^2 + qT - \frac{p^3}{27} = 0$ ed all'estrazione delle radici terze delle soluzioni.

(c) Si osservi che, se w_1 è una soluzione dell'equazione $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$, allora anche $w_2 = -\frac{p}{3w_1}$ è una soluzione della stessa equazione e che $w_1 - \frac{p}{3w_1} = w_2 - \frac{p}{3w_2}$. Si concluda che dai 6 possibili valori per le radici di $W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q = 0$, si ottengono al più tre valori distinti per le radici di $Y^3 + pY + q = 0$.

Esercizio 17 (Formule di Ferrari e Del Ferro). Si consideri l'equazione generale di quarto grado, della forma $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$, con $a \neq 0$.

(a) Si verifichi che, posto $X = Y - \frac{b}{4a}$, si ottiene $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(Y^4 + pY^2 + qY + r)$, per opportuni valori di p, q ed r.

(b) Si mostri che, introducendo una variabile ausiliaria, U, si ha

$$Y^4 + pY^2 + qY + r = \left(Y^2 + \tfrac{U}{2}\right)^2 - \left[(U-p)Y^2 - qY + (\tfrac{U^2}{4} - r)\right].$$

(c) Si osservi che, se u è una radice dell'equazione $q^2 - (U-p)(U^2 - 4r) = 0$, sostituendo u ad U nel termine di destra dell'identità nel punto precedente, si ottiene la differenza tra i quadrati di due polinomi nella Y, che è uguale al prodotto di due polinomi di secondo grado nella Y.

(d) Si concluda che il metodo precedente riconduce la risoluzione di un'equazione di quarto grado alla risoluzione di equazioni di terzo e secondo grado.

Esercizio 18. Si utilizzino i procedimenti descritti negli esercizi precedenti per trovare le radici dei seguenti polinomi

$$X^3 + 3iX - (1+i), \qquad X^3 + \frac{3(1+i)}{\sqrt{2}}X^2 + (\sqrt{2}-1)(1+i), \qquad X^4 + 2iX^2 - (1-2i)X + 2i.$$