Esercizio 1. Siano P_0, P_1, P_2 tre punti allineati nello spazio affine $\mathbb{A}$ su un campo C, e sia $P_0 \neq P_1$. Si definisce il *rapporto semplice* tra i tre punti (nell'ordine) come lo scalare

$$[P_0, P_1, P_2] = \frac{P_2 - P_0}{P_1 - P_0} = c \in C$$

ovvero, lo scalare c tale che $P_2 = P_0 + c(P_1 - P_0) = (1-c)P_0 + cP_1$, cioè la coordinata affine del punto P_2 nel riferimento sulla retta $P_0 \vee P_1$ che ha P_0 come origine e $P_1 - P_0$ come vettore di base dello spazio direttore della retta.

(a) Siano P_0, P_1, P_2 allineati e a due a due distinti. Si verifichi che

$$[P_0, P_1, P_2] = c, \qquad [P_1, P_0, P_2] = 1 - c, \qquad [P_0, P_2, P_1] = \frac{1}{c},$$
$$[P_2, P_1, P_0] = \frac{c}{c-1}, \qquad [P_2, P_0, P_1] = \frac{c-1}{c}, \qquad [P_1, P_2, P_0] = \frac{1}{1-c}.$$

(b) Si verifichi che, per $c = -1, \frac{1}{2}, 2$ (se esistono in C) si ha che alcuni tra i valori del rapporto semplice vengono a coincidere. Ci sono altri valori di c per cui ciò accade?

(c) Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'affinità e P_0, P_1, P_2 tre punti allineati di $\mathbb{A}$. Si mostri che $[f(P_0), f(P_1), f(P_2)] = [P_0, P_1, P_2]$.

Esercizio 2 (Talete)**.** Siano date due rette distinte r ed r', concorrenti in un punto O. Siano A, B punti di r e A', B' punti di r' distinti da O. Si mostri che $A \vee A'$ e $B \vee B'$ sono parallele se, e solo se, $[O, A, B] = [O, A', B']$.

Esercizio 3 (Talete)**.** Siano r ed s due rette distinte nel piano affine e v un vettore che non sia parallelo né ad r né ad s. Siano P, Q due punti distinti di r e P', Q' le loro immagini in s tramite la proiezione parallela al vettore v. Si verifichi che, preso comunque un punto R di r, il punto R' di s è la proiezione di R parallelamente a v se, e solo se, $[P, Q, R] = [P', Q', R']$.

Esercizio 4. Sia dato un quadrilatero $ABCD$ nel piano affine con i due lati opposti $A \vee B$ e $C \vee D$ tra loro paralleli. Allora, detti $M = \frac{A+D}{2}$ il punto medio tra A e D ed $N = \frac{B+C}{2}$ il punto medio tra B e C, il vettore $M - N$ è parallelo a $B - A$.

Esercizio 5. Sia dato un triangolo (non degenere) ABC nello spazio affine e due punti X nel lato $A \vee B$ ed Y nel lato $A \vee C$ distinti da A. Allora la retta $X \vee Y$ è parallela alla retta $B \vee C$ se, e solo se, $[A, B, X] = [A, C, Y]$.

Esercizio 6. Sia C una campo di caratteristica diversa da 2. Può esistere nello spazio affine su C un triangolo con due mediane parallele?

Esercizio 7. Nel piano affine, siano r ed s due rette parallele e C un punto non appartenente a nessuna delle due rette. Si indichi con $\pi : r \to s$ la corrispondenza che manda il punto X di r in $\pi(X) = (C \vee X) \cap s$.

(a) Si mostri che π è un'applicazione affine tra le due rette.

(b) Si mostri che presi comunque X ed Y in r, si ha $[C, X, \pi(X)] = [C, Y, \pi(Y)]$.

(c) Si mostri che presi comunque X, Y e Z in r, si ha $[X, Y, Z] = [\pi(X), \pi(Y), \pi(Z)]$.

(d) Cosa rispondere alle stesse domande se r ed s non fossero parallele?

Esercizio 8. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2. Nel piano affine su K, siano date due rette r ed s, parallele e distinte e si prendano due punti distinti A e B su r. Fissato un punto C non appartenente a nessuna delle due rette, siano $A' = (A \vee C) \cap s$ e $B' = (B \vee C) \cap s$.

(a) Si ponga una condizione su C affinché le due rette $A \vee B'$ e $A' \vee B$ non siano parallele.

(b) Nelle condizioni del punto precedente, sia $C' = (A \vee B') \cap (A' \vee B)$. È vero che la retta $C \vee C'$ interseca la retta r nel punto medio $M = \frac{A+B}{2}$?

Esercizio 9. Siano dati quattro punti allineati, a due a due distinti, P, Q, R, S. Si definisce il *birapporto* (*cross ratio*) dei quattro punti (nell'ordine) come

$$(P,Q,R,S) = \frac{S-Q}{S-P}\,\frac{R-P}{R-Q} = \frac{[Q,R,S]}{[P,R,S]}.$$

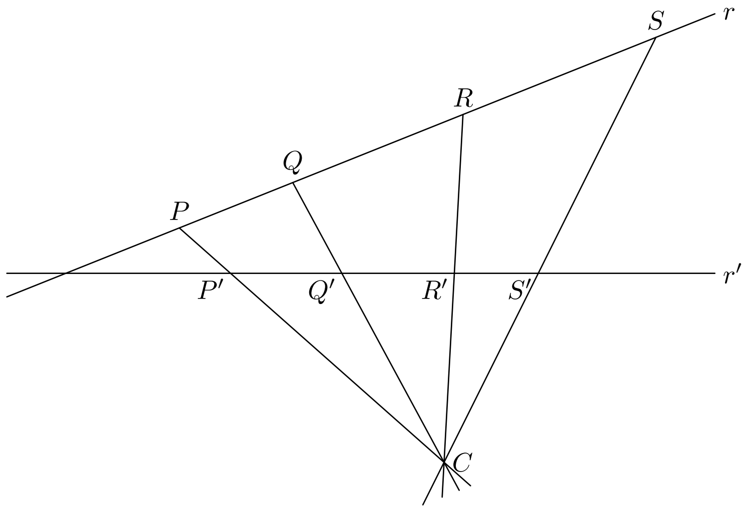
(a) Si osservi che $(P,Q,R,S) = \frac{[S,P,Q]}{[R,P,Q]}$. Ci sono altri modi di scrivere lo stesso birapporto come quoziente di rapporti semplici tra i punti dati?

(b) Posto $(P,Q,R,S) = c$; come si esprime in funzione di c il birapporto degli stessi quattro punti in tutti gli ordinamenti possibili?

(c) Cosa succede del birapporto (P,Q,R,S) se qualcuno dei punti viene a coincidere con un altro?

(d) Sia f un affinità e P, Q, R, S quattro punti allineati. È vero che $(P,Q,R,S) = (f(P), f(Q), f(R), f(S))$?

Esercizio 10. Siano date nel piano due rette distinte r ed r' ed un punto C esterno alle due rette. Si fissino dei punti P, Q, R, S (a due a due distinti) sulla retta r e li si proietti su r' dal centro C, ottenendo i punti P', Q', R', S' come in figura.



Si dimostri che $(P,Q,R,S) = (P',Q',R',S')$.

Soluzione di alcuni esercizi

2 L'insieme $\{O, A-O\}$ dà un riferimento sulla retta r e, analogamente, $\{O, A'-O\}$ dà un riferimento sulla retta r'. Inoltre, essendo due rette distinte, $\{O, A-O, A'-O\}$ dà un riferimento nel piano che contiene r ed r'. Si ha quindi, $B = O + b(A-O)$ e $B' = O + b'(A'-O)$, ove $b = [O, A, B]$ e $b' = [O, A', B']$. I due vettori $A' - A = (A'-O) - (A-O)$ e $B' - B = b(A-O) - b'(A'-O)$ sono proporzionali se, e solo se, $b = b'$.

3 Sia $R = (1-c)P + cQ \in P \vee Q$, ovvero sia $[P, Q, R] = c$. Siano inoltre, $P' = P + \alpha v$, $Q' = Q + \beta v$. La retta $R + \langle v \rangle$ interseca la retta $s = P' \vee Q'$ nel punto $R' = R + \gamma v = (1-t)P' + tQ'$ per opportuni valori di γ e t in C. Deve quindi aversi

$$P + c(Q-P) + \gamma v = R + \gamma v = P' + t(Q' - P') = P + t(Q-P) + [(1-t)\alpha + t\beta]v.$$

Poiché $Q - P$ e v sono vettori linearmente indipendenti, deve aversi $t = c$ e $\gamma = (1-c)\alpha + c\beta$. Dunque $c = [P', Q', R']$.

8 I tre punti A, B, C sono in posizione generale e quindi possiamo riferire ad essi ogni punto del piano. Si ha $A' = (1-t)A + tC$ e $B' = (1-t)B + tC$ (Talete) con $t \notin \{0, 1\}$.

Le rette $A \vee B'$ e $A' \vee B$ si intersecano in un punto $(1-\beta)B + \beta A' = (1-\alpha)A + \alpha B'$ se, e solo se, $\alpha = \beta$ e $1 - \alpha = (1-\alpha)t$; come si vede uguagliando le coordinate baricentriche dei due punti. Da ciò si deduce $\alpha = \frac{1}{2-t}$ e quindi $C' = \frac{1-t}{2-t}A + \frac{1-t}{2-t}B + \frac{t}{2-t}C$. Quindi le due rette $A \vee B'$ e $A' \vee B$ si intersecano in C' se, e solo se, $t \neq 2$, ovvero se, e solo se, la retta r e la retta s non si corrispondono nell'omotetia di centro C e coefficiente -1 (simmetria di centro C).

La retta $C \vee C'$ interseca quindi la retta $r = A \vee B$ in un punto $(1-a)C + aC' = a\frac{1-t}{2-t}A + a\frac{1-t}{2-t}B$ le cui coordinate baricentriche coincidono e qundi, necessariamente, nel punto medio tra A e B (i dubbiosi si ricordino che deve essere $1 - a + a\frac{t}{2-t} = 0$ e completino i calcoli).

Si osservi che, nel caso in cui r ed s si corrispondano nella simmetria di centro C, se si prende in luogo di $C \vee C'$ la parallela ad $A \vee B'$ (e quindi ad $A' \vee B$) passante per C, si ottiene ugualmente una retta che interseca r nel punto medio tra A e B (esercizio!).

10 Sulla retta r i punti P e Q sono in posizione generale ed abbiamo $R = (1-a)P + aQ$, $S = (1-b)P + bQ$ e si deduce che

$$(P, Q, R, S) = \frac{[Q, R, S]}{[P, R, S]} = \frac{(1-b)a}{(1-a)b}.$$

Analogamente, sulla retta r' i punti P' e Q' sono in posizione generale ed abbiamo $R' = (1-a')P' + a'Q'$, $S' = (1-b')P' + b'Q'$ e $(P', Q', R', S') = \frac{(1-b')a'}{(1-a')b'}$.

I punti P, Q e C sono in posizione generale nel piano $r \vee r'$ e quindi possiamo scrivere $P' = (1-r)C + rP$, $Q' = (1-s)C + sQ$ e ricavare delle relazioni sulle coordinate baricentriche di R' ed S', ricordando che $R' = (R \vee C) \cap (P' \vee Q')$ ed $S' = (S \vee C) \cap (P' \vee Q')$; quindi

$$\begin{aligned} R' &= (1-a')\left((1-r)C + rP\right) + a'\left((1-s)C + sQ\right) = \lambda\left((1-a)P + aQ\right) + (1-\lambda)C \\ S' &= (1-b')\left((1-r)C + rP\right) + b'\left((1-s)C + sQ\right) = \mu\left((1-b)P + bQ\right) + (1-\mu)C \end{aligned}$$

da cui, uguagliando le coordinate baricentriche, si deducono le relazioni

$$\begin{cases} (1-a')r = \lambda(1-a) \\ a's = \lambda a \\ (1-a')(1-r) + a'(1-s) = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} (1-b')r = \mu(1-b) \\ b's = \mu b \\ (1-b')(1-r) + b'(1-s) = 1 - \mu \end{cases}$$

e si conclude che

$$(P', Q', R', S') = \frac{(1-b')a'rs}{(1-a')b'rs} = \frac{(1-b)a\lambda\mu}{(1-a)b\lambda\mu} = (P, Q, R, S),$$

come si doveva verificare.