

Esercizio 1. In \mathbb{E}^3 , dato il piano π di equazione $2x+y-z+2=0$ (rispetto ad un riferimento ortonormale), determinare la matrice rispetto al sistema di riferimento dato della proiezione ortogonale su π e della simmetria (ortogonale) di asse π .

Esercizio 2. Siano r la retta del piano euclideo reale passante per il punto ${}^t(2, -1)$ e parallela al vettore ${}^t(1, 1)$ ed s la retta passante per ${}^t(1, -1)$ e parallela al vettore ${}^t(2, 1)$. Quale retta del fascio di centro $r \cap s$ contiene l'origine? E quale retta del fascio è ortogonale alla retta t di equazione $2x - 3y + 3 = 0$?

Esercizio 3. Si considerino in \mathbb{R}^4 i vettori $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determini il sottoinsieme W di \mathbb{R}^4 , formato da tutti i vettori ortogonali sia a v che a w , e si verifichi che si tratta di un sottospazio di \mathbb{R}^4 . Detto $U = \langle v, w \rangle$, si mostri che ogni vettore di \mathbb{R}^4 si scrive, in modo unico, come somma di un vettore di U e di un vettore di W .

Esercizio 4. Dati due punti P e Q dello spazio euclideo, si indichi il segmento di retta che li congiunge con $PQ = \{ P + \lambda(Q - P) \mid \lambda \in [0, 1] \}$ e si verifichi che $\text{vol}^1(PQ) = \|Q - P\|$.

Esercizio 5. Si consideri lo spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ ed i punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si calcolino $\text{vol}^3(\Delta(P_0, P_1, P_2, P_3))$, $\text{vol}^2(PL(P_0, P_1, P_3))$, $\text{vol}^1(\Delta(P_1, P_2))$; ove $\Delta(P_0, P_1, P_2, P_3)$ indica il simplesso (3-dimensionale) avente come vertici i quattro punti dati e $PL(P_0, P_1, P_3)$ indica il parallelogramma avente i punti P_0, P_1, P_3 come vertici e $\Delta(P_1, P_2)$ è il simplesso (1-dimensionale) avente come estremi i due punti.

Esercizio 6. Si considerino $n+1$ punti P_0, P_1, \dots, P_n dello spazio euclideo, $\mathbb{E} := \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ ed il simplesso Δ , determinato da tali punti. Data un'applicazione affine $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, sia Δ' il simplesso determinato dai punti $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n)$. Si verifichi che $\text{vol}^n(\Delta') = |\det f| \text{vol}^n(\Delta)$ (il determinante di un'applicazione affine è il determinante dell'applicazione lineare associata).

Esercizio 7. Siano w_1, \dots, w_k una base ortonormale del sottospazio W di \mathbb{R}^n . Si mostri che, dato comunque un vettore \mathbf{x} di \mathbb{R}^n , il vettore $\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot w_1)w_1 - \dots - (\mathbf{x} \cdot w_k)w_k$ è ortogonale ad ogni vettore di W . Si verifichi che $w_0 = (\mathbf{x} \cdot w_1)w_1 + \dots + (\mathbf{x} \cdot w_k)w_k$ è la *proiezione ortogonale* di \mathbf{x} su W , ovvero quell'unico vettore w di W tale che $\mathbf{x} - w$ sia ortogonale a W . Si verifichi infine che $\|\mathbf{x} - w_0\| \leq \|\mathbf{x} - w\|$, per ogni $w \in W$.

Esercizio 8. Si considerino la retta r , passante per P e parallela al vettore v ed un punto X dello spazio. Si verifichi che $d(X, r)^2 = \|\overrightarrow{PX}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{PX} \cdot v)^2}{\|v\|^2}$. Si faccia un disegno che giustifichi questa uguaglianza e si osservi che questa formula è valida nello spazio euclideo di dimensione qualsiasi.

Esercizio 9. Nello spazio euclideo si considerino i punti

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e le rette $r = P \vee Q$ ed $s = R \vee S$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di r ed s e si calcoli la loro distanza.

(b) Si scriva l'equazione del luogo \mathcal{Q} dei punti la cui distanza da r è doppia della distanza da s .

Esercizio 10. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette r_1 ed r_2 , di equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sgembe e si scriva l'equazione del luogo \mathcal{Q} dei punti equidistanti dalle due rette.

(b) Si verifichi che tutti i piani paralleli a $\pi: x + y + z = 0$ tagliano su \mathcal{Q} delle curve di secondo grado (cosa se ne può dire?).

Esercizio 11. Nello spazio euclideo n -dimensionale siano dati un punto P ed un vettore $v \neq 0$, e si consideri l'applicazione $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, definita ponendo

$$f(X) = X - \frac{2v \cdot (X - P)}{v \cdot v} v, \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{A},$$

ove \cdot indica il prodotto scalare.

- (a) Si mostri che f è un'isometria.
- (b) Si mostri che l'insieme dei punti uniti, $H = \{X \in \mathbb{A} \mid f(X) = X\}$, è un iperpiano e si determinino un suo punto ed il suo spazio direttore.
- (c) Si scriva la matrice dell'applicazione $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$, definita sopra, nel caso in cui $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 12. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto P e la retta r , ove

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

- (a) Si scriva l'equazione del luogo \mathcal{Q} dei punti che hanno uguale distanza dal punto P e dalla retta r .
- (b) Si determini la retta s , passante per P , perpendicolare ad r ed incidente quest'ultima.
- (c) Cosa si può dire delle curve che si ottengono intersecando \mathcal{Q} con i piani del fascio di asse s .

Esercizio 13. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed il piano $\pi : x + y - z = 0$.

- (a) Si scriva l'equazione del luogo \mathcal{Q} dei punti che hanno uguale distanza dal punto P e dal piano π .
- (b) Si determini la retta s , passante per P , perpendicolare a π e si descrivano, le curve che si ottengono intersecando \mathcal{Q} con i piani del fascio di asse s .
- (c) Si verifichi che i piani perpendicolari ad s tagliano su \mathcal{Q} una famiglia di cerchi (eventualmente di raggio immaginario).

Esercizio 14. Nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri la circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 2, contenuta nel piano $\pi : x + 2y = 0$. Si determini l'equazione cartesiana del cono \mathcal{C} , di vertice $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, che proietta tale circonferenza nello spazio.

Esercizio 15 (Decomposizione QR). Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matrice di rango n .

- (a) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt sulle colonne di A , si mostri che esistono una matrice, $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, ed una matrice invertibile e triangolare superiore, $R \in M_n(\mathbb{R})$, tali che ${}^t Q Q = \mathbf{1}_n$ e $A = QR$.
- (b) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^m$. Utilizzando la decomposizione, $A = QR$, descritta nel punto precedente, si consideri il sistema (*non equivalente*, in generale) ${}^t Q Ax = {}^t Q b$, ovvero $Rx = {}^t Q b$. Poiché R è invertibile, quest'ultimo sistema ammette sempre un'unica soluzione. Si dica che relazioni ci sono tra b e ${}^t Q b$ e tra la soluzione di $Rx = {}^t Q b$ e la soluzione (quando esiste) del sistema iniziale.
- (c) Nelle notazioni del punto precedente, sia $\xi \in \mathbb{R}^n$ la soluzione del sistema $Rx = {}^t Q b$. Si mostri che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\|A\xi - b\| \leq \|Ax - b\|$.

Esercizio 16 (minimi quadrati). Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matrice di rango n .

- (a) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^m$. Si dimostri che ${}^t A A$ è una matrice invertibile e si concluda che il sistema ${}^t A A x = {}^t A b$ ammette sempre un'unica soluzione.
- (b) Nelle notazioni del punto precedente, sia $\xi = ({}^t A A)^{-1} {}^t A b \in \mathbb{R}^n$ la soluzione del sistema ${}^t A A x = {}^t A b$. Si mostri che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\|A\xi - b\| \leq \|Ax - b\|$.