

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{E}^3$ , dato il piano  $\pi$  di equazione  $2x + y - z + 2 = 0$  (rispetto ad un riferimento ortonormale), determinare la matrice rispetto al sistema di riferimento dato della proiezione ortogonale su  $\pi$  e della simmetria (ortogonale) di asse  $\pi$ .

**Esercizio 2.** Siano  $r$  la retta del piano euclideo reale passante per il punto  ${}^t(2, -1)$  e parallela al vettore  ${}^t(1, 1)$  ed  $s$  la retta passante per  ${}^t(1, -1)$  e parallela al vettore  ${}^t(2, 1)$ . Quale retta del fascio di centro  $r \cap s$  contiene l'origine? E quale retta del fascio è ortogonale alla retta  $t$  di equazione  $2x - 3y + 3 = 0$ ?

**Esercizio 3.** Si considerino in  $\mathbb{R}^4$  i vettori  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Si determini il sottoinsieme  $W$  di  $\mathbb{R}^4$ , formato da tutti i vettori ortogonali sia a  $v$  che a  $w$ , e si verifichi che si tratta di un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ . Detto  $U = \langle v, w \rangle$ , si mostri che ogni vettore di  $\mathbb{R}^4$  si scrive, in modo unico, come somma di un vettore di  $U$  e di un vettore di  $W$ .

**Esercizio 4.** Dati due punti  $P$  e  $Q$  dello spazio euclideo, si indichi il segmento di retta che li congiunge con  $PQ = \{ P + \lambda(Q - P) \mid \lambda \in [0, 1] \}$  e si verifichi che  $\text{vol}^1(PQ) = \|Q - P\|$ .

**Esercizio 5.** Si consideri lo spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$  ed i punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si calcolino  $\text{vol}^3(\Delta(P_0, P_1, P_2, P_3))$ ,  $\text{vol}^2(PL(P_0, P_1, P_3))$ ,  $\text{vol}^1(\Delta(P_1, P_2))$ ; ove  $\Delta(P_0, P_1, P_2, P_3)$  indica il simpleso (3-dimensionale) avente come vertici i quattro punti dati e  $PL(P_0, P_1, P_3)$  indica il parallelogramma avente i punti  $P_0, P_1, P_3$  come vertici e  $\Delta(P_1, P_2)$  è il simpleso (1-dimensionale) avente come estremi i due punti.

**Esercizio 6.** Si considerino  $n+1$  punti  $P_0, P_1, \dots, P_n$  dello spazio euclideo,  $\mathbb{E} := \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$  ed il simpleso  $\Delta$ , determinato da tali punti. Data un'applicazione affine  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , sia  $\Delta'$  il simpleso determinato dai punti  $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n)$ . Si verifichi che  $\text{vol}^n(\Delta') = |\det f| \text{vol}^n(\Delta)$  (il determinante di un'applicazione affine è il determinante dell'applicazione lineare associata).

**Esercizio 7.** Siano  $w_1, \dots, w_k$  una base ortonormale del sottospazio  $W$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si mostri che, dato comunque un vettore  $\mathbf{x}$  di  $\mathbb{R}^n$ , il vettore  $\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot w_1)w_1 - \dots - (\mathbf{x} \cdot w_k)w_k$  è ortogonale ad ogni vettore di  $W$ . Si verifichi che  $w_0 = (\mathbf{x} \cdot w_1)w_1 + \dots + (\mathbf{x} \cdot w_k)w_k$  è la *proiezione ortogonale* di  $\mathbf{x}$  su  $W$ , ovvero quell'unico vettore  $w$  di  $W$  tale che  $\mathbf{x} - w$  sia ortogonale a  $W$ . Si verifichi infine che  $\|\mathbf{x} - w_0\| \leq \|\mathbf{x} - w\|$ , per ogni  $w \in W$ .

**Esercizio 8.** Si considerino la retta  $r$ , passante per  $P$  e parallela al vettore  $v$  ed un punto  $X$  dello spazio. Si verifichi che  $d(X, r)^2 = \|\overrightarrow{PX}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{PX} \cdot v)^2}{\|v\|^2}$ . Si faccia un disegno che giustifichi questa uguaglianza e si osservi che questa formula è valida nello spazio euclideo di dimensione qualsiasi.

**Esercizio 9.** Nello spazio euclideo si considerino i punti

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e le rette  $r = P \vee Q$  ed  $s = R \vee S$ .

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane di  $r$  ed  $s$  e si calcoli la loro distanza.

(b) Si scriva l'equazione del luogo  $\mathcal{Q}$  dei punti la cui distanza da  $r$  è doppia della distanza da  $s$ .

**Esercizio 10.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette  $r_1$  ed  $r_2$ , di equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si scriva l'equazione del luogo  $\mathcal{Q}$  dei punti equidistanti dalle due rette.

(b) Si verifichi che tutti i piani paralleli a  $\pi : x + y + z = 0$  tagliano su  $\mathcal{Q}$  delle curve di secondo grado (cosa se ne può dire?).

**Esercizio 11.** Nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale siano dati un punto  $P$  ed un vettore  $v \neq 0$ , e si consideri l'applicazione  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ , definita ponendo

$$f(X) = X - \frac{2v \cdot (X - P)}{v \cdot v}v, \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{A},$$

ove  $\cdot$  indica il prodotto scalare.

- (a) Si mostri che  $f$  è un'isometria.
- (b) Si mostri che l'insieme dei punti uniti,  $H = \{ X \in \mathbb{A} \mid f(X) = X \}$ , è un iperpiano e si determinino un suo punto ed il suo spazio direttore.
- (c) Si scriva la matrice dell'applicazione  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ , definita sopra, nel caso in cui  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Esercizio 12.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto  $P$  e la retta  $r$ , ove

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

- (a) Si scriva l'equazione del luogo  $\mathcal{Q}$  dei punti che hanno uguale distanza dal punto  $P$  e dalla retta  $r$ .
- (b) Si determini la retta  $s$ , passante per  $P$ , perpendicolare ad  $r$  ed incidente quest'ultima.
- (c) Cosa si può dire delle curve che si ottengono intersecando  $\mathcal{Q}$  con i piani del fascio di asse  $s$ .

**Esercizio 13.** Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  ed il piano  $\pi : x + y - z = 0$ .

- (a) Si scriva l'equazione del luogo  $\mathcal{Q}$  dei punti che hanno uguale distanza dal punto  $P$  e dal piano  $\pi$ .
- (b) Si determini la retta  $s$ , passante per  $P$ , perpendicolare a  $\pi$  e si descrivano, le curve che si ottengono intersecando  $\mathcal{Q}$  con i piani del fascio di asse  $s$ .
- (c) Si verifichi che i piani perpendicolari ad  $s$  tagliano su  $\mathcal{Q}$  una famiglia di cerchi (eventualmente di raggio immaginario).

**Esercizio 14.** Nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri la circonferenza di centro  $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e raggio 2, contenuta nel piano  $\pi : x + 2y = 0$ . Si determini l'equazione cartesiana del cono  $\mathcal{C}$ , di vertice  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , che proietta tale circonferenza nello spazio.

**Esercizio 15** (Decomposizione  $QR$ ). Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  una matrice di rango  $n$ .

- (a) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt sulle colonne di  $A$ , si mostri che esistono una matrice,  $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , ed una matrice invertibile e triangolare superiore,  $R \in M_n(\mathbb{R})$ , tali che  ${}^tQQ = \mathbf{1}_n$  e  $A = QR$ .
- (b) Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$  con  $b \in \mathbb{R}^m$ . Utilizzando la decomposizione,  $A = QR$ , descritta nel punto precedente, si consideri il sistema (*non equivalente*, in generale)  ${}^tQAx = {}^tQb$ , ovvero  $Rx = {}^tQb$ . Poiché  $R$  è invertibile, quest'ultimo sistema ammette sempre un'unica soluzione. Si dica che relazioni ci sono tra  $b$  e  ${}^tQb$  e tra la soluzione di  $Rx = {}^tQb$  e la soluzione (quando esiste) del sistema iniziale.
- (c) Nelle notazioni del punto precedente, sia  $\xi \in \mathbb{R}^n$  la soluzione del sistema  $Rx = {}^tQb$ . Si mostri che, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|A\xi - b\| \leq \|Ax - b\|$ .

**Esercizio 16** (minimi quadrati). Sia  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  una matrice di rango  $n$ .

- (a) Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$  con  $b \in \mathbb{R}^m$ . Si dimostri che  ${}^tAA$  è una matrice invertibile e si concluda che il sistema  ${}^tAAx = {}^tAb$  ammette sempre un'unica soluzione.
- (b) Nelle notazioni del punto precedente, sia  $\xi = ({}^tAA)^{-1}{}^tAb \in \mathbb{R}^n$  la soluzione del sistema  ${}^tAAx = {}^tAb$ . Si mostri che, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|A\xi - b\| \leq \|Ax - b\|$ .